



Construction d'une contrainte Delaunay-admissible en dimension 2.

Philippe P. Pébay

► To cite this version:

Philippe P. Pébay. Construction d'une contrainte Delaunay-admissible en dimension 2.. [Rapport de recherche] RR-3492, INRIA. 1998. inria-00073195

HAL Id: inria-00073195

<https://inria.hal.science/inria-00073195>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Construction d'une contrainte Delaunay-admissible en
dimension 2.***

Philippe P. PÉBAY

No 3492

18 septembre 1998

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

Construction d'une contrainte Delaunay-admissible en dimension 2.

Philippe P. PÉBAY*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3492 — 18 septembre 1998 — 36 pages

Résumé : Ce rapport propose une méthode de redéfinition *a priori*, c'est-à-dire avant toute construction d'une triangulation, d'un champ de contraintes bidimensionnel constitué d'arêtes, afin d'assurer qu'il apparaisse dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points auquel ce champ se rapporte. Une classification géométrique des arêtes constitutives de la contrainte est présentée, préalablement à la démonstration d'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une arête dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un ensemble donné de points. L'hypothèse restrictive de la position générale n'est pas faite. Ensuite, deux algorithmes de subdivision des arêtes sont proposés, et leur convergence est établie. Un jeu représentatif d'exemples illustre l'approche choisie.

Mots-clé : Triangulation, triangulation de Delaunay, triangulation contrainte, triangulation surfacique.

(Abstract: *pto*)

* E-mail : Philippe.Pebay@inria.fr

Construction of a Delaunay conforming triangulation in two dimensions.

Abstract: This report presents a method suitable to redefine *a priori*, *i.e.*, without preliminary triangulation computation, of a bidimensional field of constraints formed of edges, such as the resulting constraint appears in any Delaunay-triangulation of the convex hull of the related set of vertices. A geometrical classification of the edges of the constraint is presented, prior to the proof of a necessary and sufficient condition to decide the existence of an edge in any Delaunay-triangulation of the convex hull of a given set of points. The restrictive hypothesis of general position criterion is not assumed. Two algorithms based on edges subdivisions are proposed, and their convergence proved. A representative set of examples illustrates the method.

Key-words: Triangulation, Delaunay-triangulation, constrained triangulation, surface triangulation.

Table des matières

Introduction	4
1 Rappels et généralités	4
1.1 Diagramme de Voronoï	5
1.2 Triangulation de Delaunay	5
1.3 Triangulation contrainte	7
2 Classification	8
2.1 L'indicatrice de classification	9
2.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité	11
2.3 Delaunay-admissibilité forte	12
3 Construction	15
3.1 Résultats préliminaires	15
3.2 Un algorithme brutal	20
3.3 Un algorithme plus subtil	23
4 Exemples d'illustration	28
5 Conclusion et perspectives	35
Bibliographie	36

Introduction

Dans le contexte général de la méthode des éléments finis, la production d'une triangulation, et par suite d'un maillage, est une étape essentielle, conditionnant en particulier la qualité des résultats de la simulation. Parmi les différentes approches, la méthode dite de Delaunay présente l'avantage de la rapidité, ainsi qu'un cadre théorique propice à de nombreux développements. Cependant, ne considérant qu'un nuage de points, elle ne peut intrinséquement pas tenir compte de contraintes topologiques, exigées par la plupart des applications : contraintes de bord ou d'interfaces internes, par exemple. Par suite, deux approches peuvent être envisagées pour déduire des triangulations de Delaunay des maillages utilisables :

- récupération *a posteriori* des exigences topologiques de la contrainte, si la préservation de l'intégrité de celle-ci est requise ;
- redéfinition *a priori* de la contrainte, si un équivalent topologique et géométrique de celle-ci satisfait l'utilisateur, de telle sorte qu'elle apparaisse naturellement dans la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage des sommets¹.

En dimension 3, des méthodes de récupération *a posteriori*, dont l'existence en général n'est d'ailleurs pas claire [Ruppert,Seidel-1992] ont été proposées par plusieurs auteurs [George *et al.* 1992] [Weatherill,Hassan-1994]. De même, nous avons présenté (*cf.* [Pébay-1998]) un algorithme heuristique de redéfinition *a priori* d'une contrainte tridimensionnelle constituée de faces triangulaires, après avoir établi une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle face dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points auquel elle se rapporte.

En dimension 2, les méthodes de récupération *a posteriori* peuvent être considérées comme abouties [Borouchaki-1994]. Une approche *a priori* a été proposée par [George,Borouchaki-1997], mais sa convergence n'est claire que si la contrainte est une ligne polygonale simple sans angle aigu. En particulier, un contre-exemple est mis en évidence dans ce rapport. De plus, le cas de sommets qui ne sont pas en position générale n'est pas étudié, ce qui implique un post-traitement pour traiter les problèmes de cocyclicité. Une méthode de redéfinition *a priori* convergeant en général, capable en particulier de considérer des contraintes comportant des incidences multiples en un même point reste donc à établir ; c'est précisément l'objet de ce rapport.

Préalablement à l'établissement de l'algorithme, il importe de se donner un critère d'admissibilité d'une face *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de la triangulation de Delaunay particulière déduite de l'unique recouvrement de Delaunay. Il faut en effet garder à l'esprit le fait que dès lors que les points ne sont pas supposés être en position générale, il n'y a plus unicité de la triangulation de Delaunay. À partir d'une classification géométrique, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une arête dans le recouvrement de Delaunay est démontrée. Après une étude des problèmes spécifiques posés par les angles aigus d'une part, les connexions multiples d'autre part, un algorithme est proposé, et sa convergence établie. L'essentiel des propriétés des triangulations de Delaunay en dimension 2 est rappelé Section 1, puis la classification et le théorème d'existence et d'unicité sont exposés Section 2. La méthode de redéfinition *a priori* est présentée Section 3, puis illustrée Section 4. Enfin, des problèmes ouverts ainsi que des développements possibles sont évoqués en conclusion, Section 5.

1 Rappels et généralités

Dans cette section, on rappelle la notion de diagramme de Voronoï, dual du recouvrement de Delaunay ([Delaunay-1934]), puis sont introduites les définitions relatives aux triangulations contraintes. \mathcal{S} désigne un ensemble fini de points deux à deux distincts de \mathbb{R}^2 , dont on note P_i les points. On rappelle

1. Ainsi, étant satisfaite automatiquement, la contrainte n'en est plus une.

qu'un *maillage conforme* d'une partie Ω de \mathbb{R}^2 est un recouvrement polygonal de celle-ci, tel que toute arête d'un des polygones constitutifs soit arête d'un autre élément ou appartienne à la frontière, et que les polygones soient d'intérieurs deux à deux disjoints. Ainsi, en dimension 2, une *triangulation* est un maillage conforme dont tous les éléments sont des triangles. Enfin, on utilisera la notation standard AB pour désigner la distance euclidienne entre deux points A et B .

1.1 Diagramme de Voronoï

Un bref rappel de la notion de diagramme de Voronoï est donné; pour plus de détails, on se reportera à [Voronoi-1908] ou à l'abondante littérature sur ce sujet.

Définition 1.1 *Pour tout point $P_i \in \mathcal{S}$, la cellule de Voronoï de P_i relative à \mathcal{S} est définie comme :*

$$V_i^{\mathcal{S}} = \{M \in \mathbb{R}^2 : (\forall P_j \in \mathcal{S}) MP_i \leq MP_j\}$$

Définition 1.2 *On appelle points et arêtes de Voronoï de \mathcal{S} les intersections de cellules de dimensions respectives 1 et 2. L'ensemble des points et arêtes de Voronoï constitue le diagramme de Voronoï de \mathcal{S} , noté $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.*

Définition 1.3 *Si \mathcal{S} ne contient aucun quadruplet de points cocycliques alors on dit que les points de \mathcal{S} sont en position générale.*

La position générale assure que toutes les 4-intersections de cellules sont vides; un contre-exemple est présenté Figure 1.

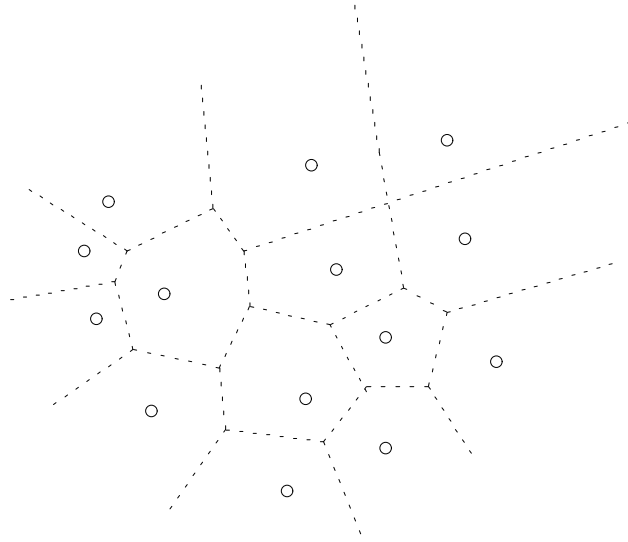


FIG. 1 – Diagramme de Voronoï; les points ne sont pas en position générale.

1.2 Triangulation de Delaunay

On rappelle les principales propriétés de la triangulation de Delaunay. Pour $1 \leq k \leq \text{card}(\mathcal{S})$, on considère une suite strictement croissante pour l'inclusion de sous-ensembles \mathcal{S}_k de \mathcal{S} , telle que $\mathcal{S}_{\text{card}(\mathcal{S})} = \mathcal{S}$. En particulier, chaque \mathcal{S}_k est un sous-ensemble de \mathcal{S} à k éléments².

Définition 1.4 *Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , si $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, alors le segment $[P_i P_j]$ est appelé arête de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$. De plus, pour tout point $M \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$, on considère*

². On pourrait, de façon équivalente, pour tout ordre arbitraire sur \mathcal{S} définir chaque \mathcal{S}_k comme le sous-ensemble constitué des k premiers points de \mathcal{S}

l'ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ des points dont les cellules de Voronoï contiennent M . On associe alors à M un polygone convexe dont les sommets sont les points de \mathcal{F} , appelé polygone de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$. Une arête ou un polygone de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ sont dits Delaunay-admissibles. L'ensemble $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ des points et arêtes de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ est appelé recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.

De cette construction par dualité (Figure 2) résulte l'orthogonalité, lorsqu'elles s'intersectent, des arêtes de Delaunay et de Voronoï. De plus, les polygones de Delaunay sont tous des convexes. Par ailleurs, il est important de noter que la Delaunay-admissibilité des trois arêtes d'un triangle n'entraîne pas la Delaunay-admissibilité de ce dernier. Les résultats qui suivent, dont on trouvera une preuve dans [Delaunay-1934], sont fondamentaux pour la construction de triangulations de Delaunay. Par cohérence avec la méthode des éléments finis, on utilise également le terme *élément* pour désigner un triangle.

Théorème 1.1 (Propriété du disque vide) *Sous les hypothèses précédentes, $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ constitue un maillage conforme $\text{Conv}(\mathcal{S})$. En particulier, c'est une triangulation appelée triangulation de Delaunay si et seulement si les points de \mathcal{S} sont en position générale. De plus, K est un élément (pas nécessairement triangulaire) de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ si et seulement si \mathcal{B}_K , le disque fermé circonscrit à K , ne contient pas d'autre point de \mathcal{S} que les sommets de K .*

On peut donc déduire de l'unique recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ au moins une triangulation de Delaunay, même si les points ne sont pas en position générale, en subdivisant en triangles arbitraires les polygones non triangulaires de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Il n'y a pas conséquent plus unicité de cette triangulation de Delaunay. Plus précisément, on rappelle que le nombre de triangulations d'un polygone convexe à $n+1$ côtés est égal au n -ième nombre de Catalan, donné par la formule :

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

L'exemple introduit par la Figure 1 autorise donc deux triangulations de Delaunay distinctes, dont l'une est présentée par la Figure 3.

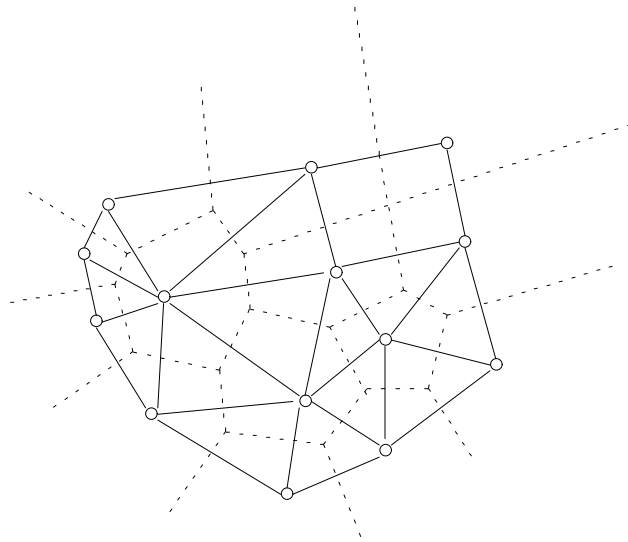


FIG. 2 – Le recouvrement de Delaunay contient un quadrilatère.

Théorème 1.2 (Lemme Général de Delaunay en dimension 2) *Soit \mathcal{T} une triangulation de $\text{Conv}(\mathcal{S})$. Si la propriété du disque vide est satisfaite pour toute configuration de deux triangles adjacents de \mathcal{T} , alors elle est vraie sur tout \mathcal{T} et celle-ci est une triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.*

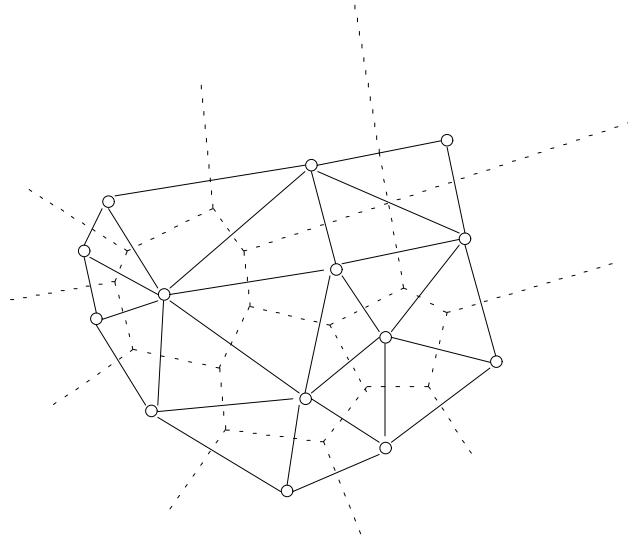


FIG. 3 – Une triangulation de Delaunay arbitraire déduite du recouvrement.

Le théorème suivant permet le développement d'algorithmes de maillage automatique, par insertion successive des sommets de l'objet considéré. On convient de désigner par fP le triangle dont les sommets sont ceux de l'arête f ainsi que le point P .

Théorème 1.3 *Pour $4 \leq k \leq \text{card}(\mathcal{S})$, on suppose connu $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$, et on appelle, lorsqu'ils existent, K_1, K_2, \dots, K_p les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ tels que $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{K_i}$ contienne P_k . Alors :*

- Si $P_k \in \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$, alors $C = \bigcup_{1 \leq i \leq p} K_i$ est un polygone étoilé par rapport à P_k , appelé cavité de celui-ci. De plus, considérant les s arêtes f_j^C de C :

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s} f_j^C P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- Si $P_k \notin \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$ et s'il existe au moins K_1 , alors $C = \bigcup_{1 \leq i \leq p} K_i$ est un polygone dont s'arêtes f_j^C ne sont pas visibles de P_k , et de plus :

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s'} f_j^C P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- Si $P_k \notin \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$ et s'il n'existe aucun K_i , alors, considérant les s'' arêtes frontières f_j de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ visibles par P_k :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s''} f_j P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

1.3 Triangulation contrainte

On cherche à ce que la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points respecte, en un sens que nous allons préciser, une contrainte d'ordre topologique. La condition la plus forte consiste naturellement à exiger de la triangulation qu'elle contienne exactement les éléments de la contrainte.

Définition 1.5 *On appelle champ de contraintes d'un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} un ensemble fini d'arêtes Γ tel que :*

1. Toute arête de Γ a ses extrémités dans \mathcal{S} (et ne contient aucun autre point de celui-ci).

2. Les arêtes de Γ ne s'intersectent pas hormis éventuellement en leurs extrémités.

Définition 1.6 *On dit qu'une triangulation vérifie exactement un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement dans celle-là.*

Au sens de la Définition 1.6, deux cas de figure peuvent se présenter concernant la triangulation de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} et un champ de contraintes associé Γ :

- soit $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ vérifie exactement Γ ;
- soit $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ ne vérifie pas exactement Γ ; dans ce cas, on peut modifier localement $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ pour faire apparaître les constituants de Γ .

Par conséquent, compte tenu de l'unicité du recouvrement de Delaunay, la satisfaction forte de la contrainte conduit à une triangulation qui n'est pas de Delaunay en général, dès lors qu'après modifications locales elle ne contient plus nécessairement le recouvrement de Delaunay.

Consécutivement, on est amené à proposer une définition plus faible, mais d'application plus générale :

Définition 1.7 *On dit qu'une triangulation vérifie faiblement un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement ou par recouvrement dans celle-là.*

En ce dernier sens, deux approches permettent de produire une triangulation vérifiant la contrainte. Elles consistent à :

- donner une subdivision de la contrainte plus aisée à retrouver par modifications locales de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
- subdiviser Γ en un nouveau champ de contraintes Γ' dont tous les éléments soient Delaunay-admissibles. Ainsi, ils seront tous construits par une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' , nuage de points obtenu par ajout à \mathcal{S} des sommets de Γ' non présents dans Γ .

Pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées au sujet de la Définition 1.6, la première approche ne peut satisfaire une exigence générale de Delaunay-admissibilité. En revanche, une éventuelle solution obtenue par la seconde est par définition Delaunay-admissible. La difficulté est de déterminer \mathcal{S}' , avec un nombre raisonnable de points supplémentaires.

Nous ne rappelons pas le principe des méthodes de récupération *a posteriori*, puisque la satisfaction exacte de la contrainte entraîne la perte de la Delaunay-admissibilité de la triangulation. On se reportera à [George,Borouchaki-1997] ou [Pébay-1998] pour une explication des méthodes de récupération par forçage ou par cassage. En revanche, l'objet du présent rapport étant de proposer une méthode de construction d'une contrainte Delaunay-admissible, on ne peut donc pas exiger une vérification exacte du champ de contraintes.

Une approche a été proposée par [George,Borouchaki-1997], basée sur la subdivision des arêtes de la contrainte par projections orthogonales. Nous nous proposons dans les sections suivantes de détailler les bases théoriques à la convergence de cette méthode, de la rendre indépendante de la triangulation de Delaunay choisie dans le cas où les points ne sont pas en position générale, enfin de la généraliser au cas où la contrainte n'est pas une ligne polygonale simple, c'est-à-dire aux contraintes comportant des incidences multiples en un ou plusieurs points de \mathcal{S} .

2 Classification

On considère un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} et un champ de contraintes associé Γ et l'on se propose de donner une classification discriminant les arêtes de Γ qui seront dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , on désigne par \mathcal{H}_{ij} , \mathcal{H}_{ij}^+ et \mathcal{H}_{ij}^- respectivement la droite $(P_i P_j)$ et les deux demi-plans ouverts limités par cette dernière.

2.1 L'indicatrice de classification

L'indicatrice Θ_2 présentée dans ce paragraphe a pour objet la classification des arêtes de Γ , permettant de décider de leur Delaunay-admissibilité et par suite, de leur traitement éventuel.

Définition 2.1 On appelle petit cercle (respectivement petit disque) d'une arête non dégénérée le cercle (respectivement le disque) ayant pour diamètre cette arête.

Il est clair qu'un cercle ayant pour corde une arête donnée a un diamètre de longueur supérieure ou égale à celle de l'arête ; par suite, le petit cercle est le plus petit des cercles passant par les extrémités de l'arête. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , on convient de noter \mathcal{C}_{ij} (respectivement Δ_{ij}) le petit cercle (respectivement le petit disque fermé) de l'arête $[P_i P_j]$.

Définition 2.2 Soit f une arête dont les extrémités P_i et P_j sont des points distincts de \mathcal{S} . En posant $\mathcal{S}_{ij} = \Delta_{ij} \cap \mathcal{S}$, on définit le type de f , noté $\Theta_2(f)$, de la façon suivante :

- Si $\mathcal{S}_{ij} = \{P_i, P_j\}$, alors $\Theta_2(f) = 0$ (Figure 4).
- Si $\mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\} = \mathcal{E}$, avec $\mathcal{E} = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, on désigne par Q^* un point de \mathcal{E} tel que $\widehat{P_i Q^* P_j}$ soit maximal,
 - si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$ ou si $\Delta_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, Q^*\}$, alors $\Theta_2(f) = 1.0$ (Figure 5) ;
 - si $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 1.1$ (Figure 8) ;
 - si $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$, $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\Delta_t \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, Q^*\} = \mathcal{F} \neq \emptyset$, alors :
 - si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, alors $\Theta_2(f) = 1.2.0$ (Figure 6) ;
 - si $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 1.2.1$ (Figure 9).
- Si $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij} = \{P_i, P_j\}$, $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 2$ (Figure 7).

Cette définition appelle plusieurs remarques ; tout d'abord, les deux cas conduisant à $\Theta_2(f) = 1.0$ admettent une unique situation commune, pour $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$ et $\mathcal{E} = \{Q^*\}$. Par ailleurs, pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, le rayon du disque circonscrit au triangle $t = P_i P_j Q^*$ est donné par la formule suivante :

$$R_t = \frac{P_i P_j}{2 \sin \widehat{P_i Q^* P_j}}.$$

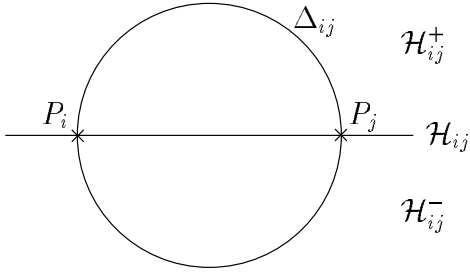
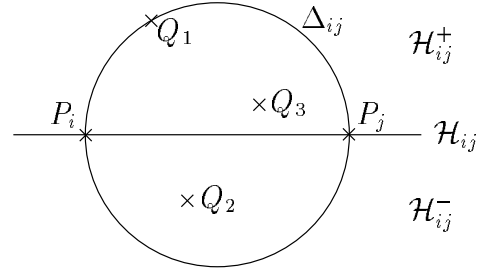
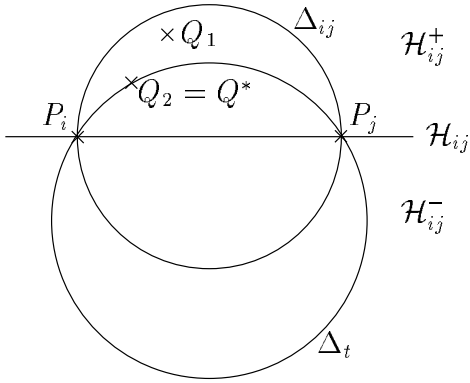
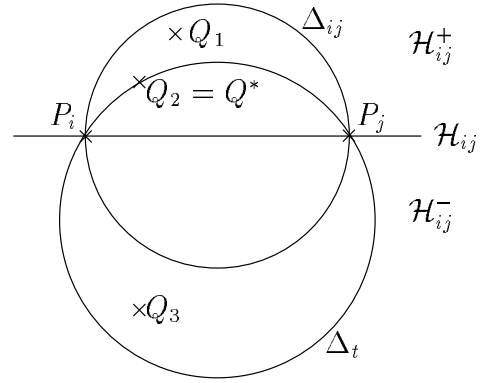
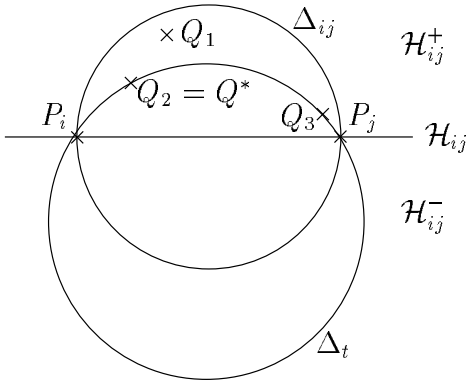
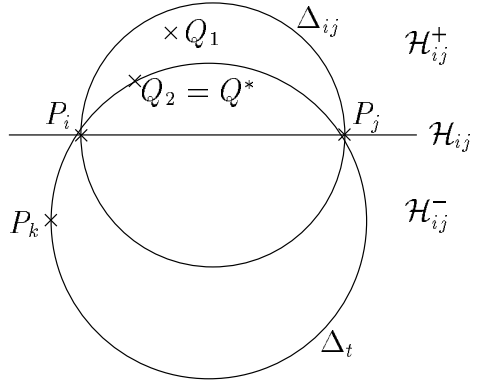
Or, puisque $\{Q^*\} \in \mathcal{E}$, on a $\widehat{P_i Q^* P_j} \geq \frac{\pi}{2}$. La fonction sinus étant strictement positive et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$, R_t est donc minimal lorsque $\widehat{P_i Q^* P_j}$ est maximal, et réciproquement en raison de la bijectivité du sinus de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur $]0, 1]$. Il est donc équivalent de définir Q^* comme un point de \mathcal{E} tel que le disque circonscrit au triangle $P_i P_j Q^*$ soit de rayon maximal.

Enfin, si $\Theta_2(f) = 1.1$, on montre aisément que $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$. En effet, si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\{Q_1, \dots, Q_r\} \subset \mathcal{C}_{ij}$, donc $\Delta_t = \Delta_{ij}$. Or $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, donc

$$\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_{ijk} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle Q^* est le point de \mathcal{E} tel que Δ_t soit de rayon maximal ; par l'absurde, on a donc nécessairement $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$.

Pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, la définition de Q^* parmi les points de \mathcal{E} n'est pas anodine ; en effet, si le disque ouvert circonscrit à $P_i P_j P_n$ contient des points de \mathcal{S} , alors ce triangle n'est pas Delaunay-admissible, donc f ne peut pas être construite comme arête de celui-ci. L'admissibilité de $P_i P_j Q^*$ requiert par

FIG. 4 – $\Theta_2(f) = 0$ FIG. 7 – $\Theta_2(f) = 2$ FIG. 5 – $\Theta_2(f) = 1.0$ FIG. 8 – $\Theta_2(f) = 1.1$ FIG. 6 – $\Theta_2(f) = 1.2.0$ FIG. 9 – $\Theta_2(f) = 1.2.1$

suite que $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S}$ soit vide, ce qui implique que $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S}$ et $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \cap \mathcal{S}$ le soient. L'important résultat suivant établit une partie de cette exigence, justifiant le choix de Q^* .

Lemme 2.1 *Pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, avec les notations de la Définition 2.2, on a :*

- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ alors $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset$;
- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$ alors $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Preuve : Sans perte de généralité, il suffit de montrer l'assertion dans le cas où $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$, en distinguant deux cas.

- Dans le cas où $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\Delta_t = \Delta_{ij}$, et en particulier $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ = \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$.
- Dans le cas où $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$, alors \mathcal{C}_t , cercle circonscrit à t , est sécant à \mathcal{C}_{ij} en P_i et P_j , et par suite, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$. Or, par hypothèse, $Q^* \in \mathcal{C}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, donc $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$.

Supposons alors que

$$(\exists M \in \mathcal{S}) \quad M \in \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$$

ce qui entraîne en particulier que $\widehat{P_i M P_j} < \widehat{P_i Q^* P_j}$. D'après ce qui précède, $M \in \mathcal{E}$; par hypothèse, on a donc $\widehat{P_i M P_j} \geq \widehat{P_i Q^* P_j}$. Par l'absurde, on en déduit qu'il ne peut pas exister de tel point M , d'où

$$\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

□

2.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité

Le présent paragraphe a pour objet d'établir les types d'arêtes qui sont admises par toute triangulation de Delaunay.

Lemme 2.2 *Si $\Theta_2(f) \in \{0 ; 1.0 ; 1.2.0\}$, alors f est contenue dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .*

Preuve : Il suffit de prouver que f est contenue dans le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ pour s'assurer qu'elle sera présente dans toute triangulation de Delaunay de celle-ci. On utilise les notations de la Définition 2.2, et l'on désigne par O_f le milieu de $[P_i P_j]$.

1. Si $\Theta_2(f) = 0$, alors

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_f P_i = O_f P_j < O_f P_n$$

ce qui entraîne, d'une part

$$O_f \in V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$$

c'est-à-dire que $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ contient au moins O_f ; d'autre part

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_f \notin V_n^{\mathcal{S}}$$

ce qui entraîne que O_f ne peut être un point de Voronoï. Par suite, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ est une arête de Voronoï passant par O_f ; en d'autres termes

$$f = [P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

2. Si $\Theta_2(f) = 1.0$ alors, en employant les notations de la Définition 2.2, on distingue les deux cas suivants :

- si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\overset{\circ}{\Delta}_{ij}$ ne contient aucun point de \mathcal{S} , donc, d’après le Théorème 1.1,

$$\Pi = \text{Conv}(P_i, P_j, Q_1, \dots, Q_r) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

or, tous les Q_m se trouvant dans un même demi-plan ouvert limité par la droite $(P_i P_j)$, $[P_i P_j]$ est donc une arête de Π . Par suite, $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

- si $\Delta_i \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, Q^*\}$, alors, d’après le Théorème 1.1,

$$P_i P_j Q^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

donc, en particulier, $f = [P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

3. Si $\Theta_2(f) = 1.2.0$ alors, pour la même raison que ci-dessus,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

et comme précédemment, puisque $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, f est donc une arête de Π , entraînant que $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. \square

Le Lemme 2.2 étant établi, on est légitimement fondé à s’interroger sur sa réciproque. Or, en raison de la non-unicité de la triangulation de Delaunay construite pour un ensemble de points \mathcal{S} quelconque, se présentent, pour une arête f donnée, les cas disjoints suivants :

1. Soit $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, et par suite f appartient à toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$; le Lemme 2.2 montre que c’est en particulier le cas si $\Theta_2(f) \in \{0 ; 1.0 ; 1.2.0\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, ce qui ne permet pas de conclure quant à l’existence de f dans une certaine triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, puisque l’on est face à l’alternative suivante :
 - (a) si, pour tout polygone (pas forcément triangulaire) de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, f n’en est ni un côté, ni une diagonale, alors on peut affirmer qu’elle n’est pas Delaunay-admissible, quelle que soit la triangulation de Delaunay déduite de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
 - (b) si f est une diagonale d’un polygone non triangulaire Π de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, alors il existe au moins deux triangulations de Π , l’une contenant f et l’autre pas ; par suite, f est Delaunay-admissible relativement à au moins une triangulation de Delaunay de $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, mais pas à toutes.

Il résulte de ces remarques que le Lemme 2.2 n’est pas nécessaire à l’admissibilité dans une triangulation de Delaunay particulière ; en particulier, les arêtes relevant du cas 2.(a), qui ne satisfont donc pas aux conditions requises, peuvent cependant toujours être retrouvées *a posteriori* par des bascules d’arêtes, sans faire perdre à la triangulation sa Delaunay-admissibilité. La recherche d’une condition nécessaire n’a donc, dans ce contexte, pas de sens puisque la détermination de la triangulation à partir du recouvrement de Delaunay n’est pas prévisible dans le cadre théorique actuel dès lors que celle-ci est, par définition, arbitraire.

2.3 Delaunay-admissibilité forte

Dans le paragraphe précédent est apparue la nécessité d’un cadre dans lequel l’admissibilité des arêtes ne dépend pas du mode de choix de la triangulation de Delaunay, subdivision particulière obtenue à partir du recouvrement du même nom. C’est la raison pour laquelle est à présent introduite une hypothèse plus forte de Delaunay-admissibilité, pour laquelle une condition nécessaire peut être établie.

Définition 2.3 *On dit qu’une arête est fortement Delaunay-admissible si elle appartient au recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.*

Une définition équivalente consiste à dire qu'une face est fortement Delaunay-admissible si elle est contenue dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, puisque d'une part les éléments du recouvrement de Delaunay sont contenus dans toute triangulation du même nom, d'autre part l'intersection de toutes les triangulations de Delaunay est égale au recouvrement. Le Lemme 2.2 constitue donc une condition suffisante de Delaunay-admissibilité forte.

Préalablement à l'établissement de la condition nécessaire de Delaunay-admissibilité forte, un important résultat concernant la configuration formée par deux cercles sécants est établi.

Lemme 2.3 *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles, sécants sur la droite \mathcal{H} . On désigne par Δ et Δ' les disques limités respectivement par \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Considérant un point $P \in \mathcal{C}$, on a alors*

- Si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$, ou si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$, alors $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$;
- si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \notin \Delta'$, ou si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \in \Delta'$, alors $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^-$.

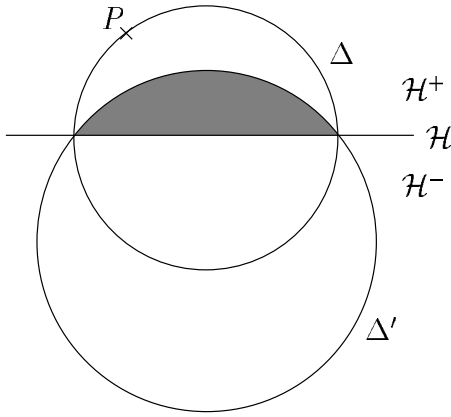


FIG. 10 – Cas $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$.

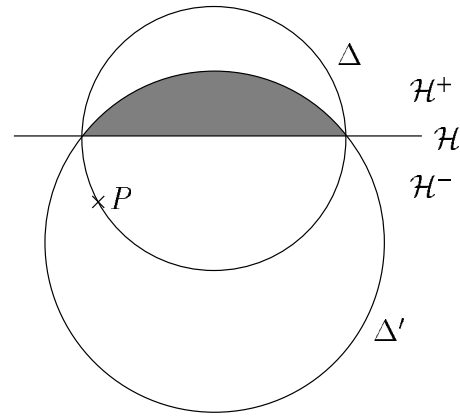


FIG. 11 – Cas $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$.

Preuve : Seule la preuve de la première assertion est détaillée ici ; on en déduit la seconde par réflexion d'axe \mathcal{H} . On distingue les deux cas de figure possibles : $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$ d'une part ; $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$ d'autre part.

1. Si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$ (Figure 10) alors, sachant que $P \in \mathcal{C} \subset \Delta$, on a d'une part $P \in \Delta \cap \mathcal{H}^+$ et, d'autre part, $P \notin \Delta' \cap \mathcal{H}^+$ donc $\Delta \cap \mathcal{H}^+ \not\subset \Delta' \cap \mathcal{H}^+$. Or \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des cercles sécants sur \mathcal{H} , donc $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$ ou $\Delta \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^+$, d'où, nécessairement $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$.
2. Si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$ (Figure 11), on sait également, par hypothèse, que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \subset \mathcal{H}$ et $P \in \mathcal{C}$. Par suite, $P \notin \mathcal{C}'$ et

$$P \in (\Delta' \setminus \mathcal{C}') \cap \mathcal{H}^- = \overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraîne, $\overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^-$ étant ouvert, donc en particulier voisinage de P , qu'il existe un disque non vide Δ_P centré en P tel que

$$\Delta_P \subset \overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^- \subset \Delta' \cap \mathcal{H}^-$$

d'où

$$(\forall M \in \Delta_P) \quad M \in \Delta' \cap \mathcal{H}^-$$

or, puisque $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}^-$, on a $\Delta_P \not\subset \Delta \cap \mathcal{H}^-$ donc

$$(\exists M_0 \in \Delta_P) \quad M_0 \notin \Delta \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraîne que $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \not\subseteq \Delta \cap \mathcal{H}^-$. De plus, comme \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des cercles sécants sur \mathcal{H} , $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^-$ ou $\Delta \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^-$, donc nécessairement $\Delta \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^-$. Par réflexion d'axe \mathcal{H} , ceci équivaut à $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$.

□

Le théorème qui suit fournit une condition nécessaire et suffisante de Delaunay-admissibilité. Il assure l'existence d'une arête donnée dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points auquel elle se rapporte ou, au contraire, son absence dans au moins une telle triangulation.

Théorème 2.1 *f est fortement Delaunay-admissible si et seulement si*

$$\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}.$$

Preuve : On distingue les différents cas, liés à la valeur de Θ_2 . Les notations sont celles de la Définition 2.2, et O_f désigne le milieu de $[P_i P_j]$.

1. Si $\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$ alors le Lemme 2.2 entraîne que f est fortement Delaunay-admissible.
2. Si $\Theta_2(f) = 1.1$, fixons les idées en considérant que $Q^* \in \mathcal{H}_{ij}^+$; on ne détaille pas le raisonnement si $Q^* \in \mathcal{H}_{ij}^-$, puisqu'il est similaire à réflexion par rapport à $(P_i P_j)$ près. Pour tout $P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}$ on note $t_n = P_i P_j P_n$, et on distingue deux sous-cas.

(a) Si $P_n \in \mathcal{H}_{ij}^+$ (c'est en particulier le cas si $P_n \in \mathcal{E}$) alors, d'après le Lemme 2.1, $P_n \notin \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, et deux cas de figure se présentent alors : soit $P_n \in \Delta_t$, soit $P_n \notin \Delta_t$.

- i. si $P_n \in \Delta_t$ alors $P_n \in \mathcal{C}_t$, le cercle circonscrit à t . Par suite, $\Delta_{t_n} = \Delta_t$ donc $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;
- ii. si $P_n \notin \Delta_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, et en particulier $Q^* \in \overset{\circ}{\Delta}_{t_n}$, d'où $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

(b) Si $P_n \in \mathcal{H}_{ij}^-$, on doit alors distinguer trois hypothèses :

- i. si $P_n \in \overset{\circ}{\Delta}_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ donc, de même qu'en (a)-ii, $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;
- ii. si $P_n \in \mathcal{C}_t$ alors, pour les mêmes raisons qu'en (a)-i,

$$\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset ;$$

- iii. si $P_n \notin \Delta_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$. Or, d'après le Lemme 2.1, $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_{ij}^- \subset \Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^-$ donc

$$(\forall M \in \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S}) \quad M \in \Delta_{t_n}$$

$$\text{d'où } \overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset.$$

On a donc prouvé que de façon générale

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}) \quad \overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

cependant, l'existence de f dans \mathcal{D}_S implique celle d'un polygone Π ayant $P_i P_j$ pour arête. Par suite Π , dont les sommets pris dans \mathcal{S} sont nécessairement cocycliques, admet un disque circonscrit Δ_Π vérifiant, d'après le Théorème 1.1,

$$\overset{\circ}{\Delta}_\Pi \cap \mathcal{S} = \emptyset$$

or, en raison de la cocyclicité des sommets de Π , son disque circonscrit est confondu avec celui de $P_i P_j P_n$, P_n étant un sommet quelconque de Π , distinct de P_i et P_j , donc

$$(\exists P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}) \quad \overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \emptyset$$

ce qui contredit ce qui a été montré précédemment ; un tel polygone Π ne pouvant exister, il vient donc que $f \notin \mathcal{D}_S$.

3. Si $\Theta_2(f) = 1.2.1$ alors, d'après le Théorème 1.1, $\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_S$. Or, puisque $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, on a $]P_i P_j[\subset \overset{\circ}{\Pi}$ et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$.
4. Si $\Theta_2(f) = 2$, alors soit $\mathcal{E} = \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$. On distingue deux sous-cas :

- (a) si $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}_{ij}$, alors $\Pi = \text{Conv}(\mathcal{S}_{ij}) \in \mathcal{D}_S$, or $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, donc $]P_i P_j[\subset \overset{\circ}{\Pi}$ et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$;
- (b) si $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{C}_{ij}$, alors pour tout $P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}$ on note $t_n = P_i P_j P_n$. Puisque \mathcal{C}_{ij} et \mathcal{C}_{t_n} sont sécants sur \mathcal{H}_{ij} , $\Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$ ou $\Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ donc, puisque $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, il vient que $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. De façon générale, on a donc

$$(\forall P_n \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_n \notin \mathcal{D}_S$$

et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$. □

3 Construction

La classification des arêtes étant effectuée, cette section a pour objet de proposer une méthode de redéfinition *a priori* de la contrainte Γ constituée par l'ensemble de ces arêtes. La méthode proposée consiste à partitionner Γ en Γ' , dont tous les arêtes doivent être fortement Delaunay-admissible. Ainsi, Γ' sera construite par toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' , ce qui revient à dire que Γ sera satisfaite faiblement³. Après avoir établi certains résultats essentiels, un algorithme est proposé, ainsi que la preuve de sa convergence.

Dans cette section, on suppose donnés \mathcal{S} , ensemble fini de points ainsi qu'un champ de contraintes Γ , constitué d'arêtes dont les extrémités et ne s'intersectant qu'en celles-ci.

3.1 Résultats préliminaires

Une méthode de subdivision d'une arête isolée vidant les petits disques associés aux nouvelles arêtes des points de \mathcal{S} est tout d'abord établie. L'influence d'une telle subdivision sur les autres arêtes du champ de contraintes est ensuite étudiée ; les configurations locales de deux arêtes incidentes sont discutées, en fonction de l'angle qu'elles forment. Le cas des arêtes disjointes est enfin présenté, montrant que des subdivisions finies de ces arêtes deviennent sans effet l'une sur l'autre. Préalablement, on remarque la propriété suivante au prix d'un raisonnement élémentaire :

3. Les triangulations des enveloppes convexes sont calculées par le mailleur du programme EMC2 développé à l'INRIA, voir [Hecht, Saltel-1990].

Remarque 3.1 Si P_i, P_2 et P_j sont trois points tels que $P_i \neq P_j$ et $P_2 \in]P_i P_j[$, alors les cercles de diamètres respectifs $[P_i P_2]$ et $[P_2 P_j]$ sont tangents intérieurement au cercle de diamètre $[P_i P_j]$.

Une conséquence immédiate de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 3.1 Soit $[P_i P_j]$ une arête non dégénérée de Γ , dont le petit disque Δ_{ij} contient au moins un point $P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}$. Alors, désignant par M , Δ et Δ' respectivement le projeté orthogonal de P_n sur $[P_i P_j]$ et les petits disques de $[P_i M]$ et $[M P_j]$, on a :

$$\text{card}(\Delta \cap \mathcal{S}) + \text{card}(\Delta' \cap \mathcal{S}) < \text{card}(\Delta_{ij} \cap \mathcal{S})$$

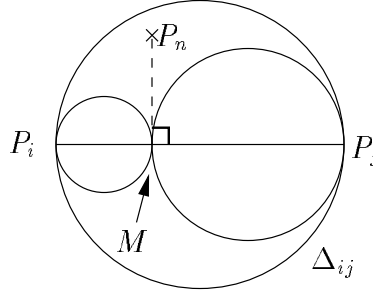


FIG. 12 – Insertion d'un point sur une arête et petits disques créés.

À toute arête f dont le petit disque contient r points de \mathcal{S} , le Corollaire 3.1 permet donc d'associer une partition en deux arêtes f_1 et f_2 dont les petits disques contiennent au total au plus $r - 1$ points de \mathcal{S} . Par suite, au plus r tels partitionnement itérés permettent de construire une subdivision de f en sous-arêtes dont tous les petits disques sont vides de points de \mathcal{S} . Cependant, les points ainsi créés peuvent être contenus dans le petit disque d'une autre arête f' , et par suite lui faire perdre dans certains cas son éventuelle Delaunay-admissibilité⁴. Les considérations qui suivent ont donc pour objet d'étudier l'effet de la subdivision d'une arête sur les autres.

Lemme 3.2 Soient $[P_h P_i]$, $[P_i P_j]$ et $[P_j P_k]$ trois arêtes non dégénérées de Γ , telles que $\widehat{P_h P_i P_j}$ et $\widehat{P_i P_j P_k}$ soient obtus ou droits. On a alors

$$(\forall M \in]P_i P_j[) \quad M \notin \Delta_{hi} \cup \Delta_{jk}.$$

Preuve : Pour tout $M \in]P_i P_j[$, le triangle $P_h P_i M$ est non dégénéré donc en particulier $\widehat{M P_h P_i} \neq 0$. Or, par hypothèse,

$$\widehat{P_h P_i M} = \widehat{P_h P_i P_j} \geq \frac{\pi}{2}$$

donc, en considérant la somme des angles du triangle $P_h P_i M$,

$$\widehat{P_i M P_h} < \widehat{P_i M P_h} + \widehat{M P_h P_i} \leq \frac{\pi}{2}$$

ce qui entraîne que $M \notin \Delta_{hi}$. De plus, utilisant un raisonnement similaire, on montre que $M \notin \Delta_{jk}$, d'où la conclusion. \square

Le Lemme 3.2 assure donc que la partition d'une arête dont les voisines forment avec elle des angles obtus ou droits n'ajoute aucun point dans les petits disques de ces dernières ; l'indicatrice Θ_2 de ces dernières n'est donc pas affectée ainsi que, par suite, leurs caractéristiques de Delaunay-admissibilité.

4. Par exemple, si $\Theta_2(f') = 1.0$, en ajoutant un point dans le petit disque de f' de telle sorte que $\Theta_2(f') = 2$.

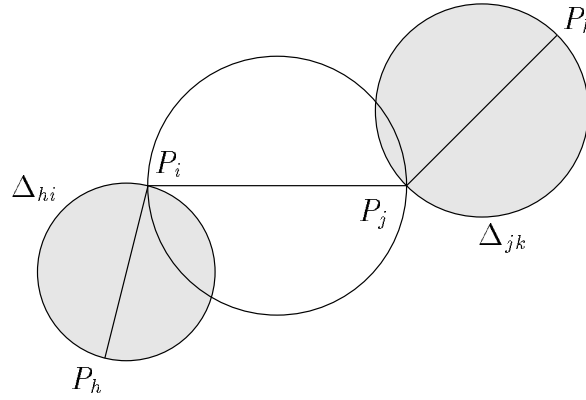


FIG. 13 – Exemple d'arêtes formant des angles obtus.

En revanche, une telle propriété n'est pas vraie si deux arêtes forment un angle aigu ; le résultat qui suit précise dans ce cas quelle portion d'une arête est contenue dans le petit disque de sa voisine.

Lemme 3.3 Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux arêtes non dégénérées de Γ formant un angle aigu, et M le projeté orthogonal de P_h sur $(P_i P_j)$. On a alors

$$\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[\neq \emptyset$$

et plus précisément,

- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} \geq P_i P_j$, alors $\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i P_j[$;
- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} < P_i P_j$, alors $\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i M] \subsetneq]P_i P_j[$.

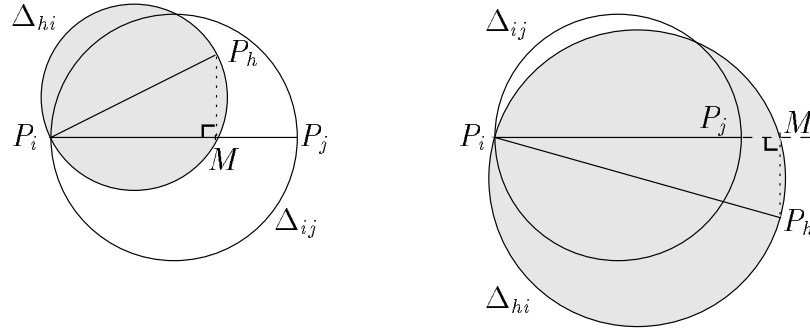


FIG. 14 – Exemples d'arêtes formant un angle aigu.

Preuve : En considérant le produit scalaire euclidien et en se donnant une mesure algébrique arbitraire sur $(P_i P_j)$, il vient, par définition de M , que

$$\overrightarrow{P_i P_j} \cdot \overrightarrow{P_i P_h} = \overrightarrow{P_i P_j} \times \overrightarrow{P_i M} = P_i P_j \times P_i P_h \times \cos \widehat{P_h P_i P_j}$$

or, l'angle $\widehat{P_h P_i P_j}$ étant aigu par hypothèse, le cosinus est donc strictement positif, $\overrightarrow{P_i P_j}$ et $\overrightarrow{P_i M}$ ont donc même sens et par suite,

$$\overrightarrow{P_i M} = \cos \widehat{P_h P_i P_j} \times \frac{P_i P_h}{P_i P_j} \cdot \overrightarrow{P_i P_j}$$

ce qui entraîne en particulier que

- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} \geq P_i P_j$, alors $]P_i P_j[\subset]P_i M[$, d'où $[P_i M] \cap]P_i P_j[=]P_i P_j[$;

– si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} < P_i P_j$, alors $]P_i M[\subsetneq]P_i P_j[$, d'où $[P_i M] \cap]P_i P_j[=]P_i M]$.

De plus, le triangle $P_i M P_h$ étant rectangle en M , M appartient à \mathcal{C}_{hi} ; par suite, $[P_i M]$ est une corde de ce cercle, donc

$$\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[= \Delta_{hi} \cap (P_i P_j) \cap]P_i P_j[= [P_i M] \cap]P_i P_j[$$

d'où le résultat. \square

Corollairement au Lemme 3.3, l'insertion d'un point sur l'arête $[P_i P_j]$ peut, sous certaines conditions, modifier la Delaunay-admissibilité de $[P_h P_i]$, de telle sorte que celle-ci doive à son tour être partitionnée. Pour les mêmes raisons, tout point inséré sur $[P_h P_i]$ peut affecter l'admissibilité de sa voisine issue de la partition de $[P_i P_j]$; dès lors, il convient d'éviter que de telles subdivisions alternées ne tendent vers la création d'arêtes nulles.

Lemme 3.4 *Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux arêtes non dégénérées de Γ formant un angle aigu non nul et $\mathcal{S}_{hij} = (\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij}) \setminus \{P_i\}$. En convenant que*

$$d_i = \min_{M \in \mathcal{S}_{hij}} MP_i$$

on définit P_{hi} (respectivement P_{ij}) comme le point de $[P_h P_i]$ (respectivement de $[P_i P_j]$) situé à une distance $d < d_i$ de P_i , et l'on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{P_{hi}, P_{ij}\}$. Alors le petit disque de $[P_i P_{hi}]$ (respectivement de $[P_i P_{ij}]$) ne contient pas d'autre point de \mathcal{S}' que P_i et P_{hi} (respectivement P_{ij}).

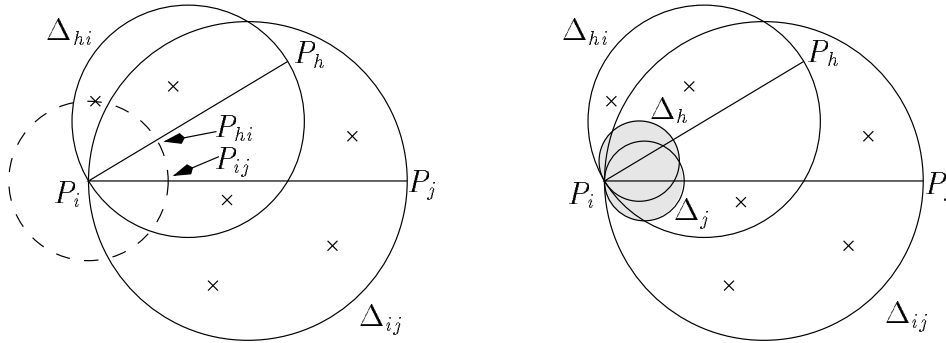


FIG. 15 – Insertions sur deux arêtes formant un angle aigu.

Preuve : Seule la preuve concernant Δ_j , petit disque de $[P_i P_{ij}]$ est détaillée; on en déduit l'homologue pour Δ_h par transposition des indices h et j . Par définition de \mathcal{S}' , on a

$$\Delta_j \cap \mathcal{S}' = (\Delta_j \cap \mathcal{S}) \cup (\Delta_j \cap \{P_{hi}, P_{ij}\})$$

or, d'après le Remarque 3.1, $\Delta_j \subset \Delta_{ij}$ donc

$$\Delta_j \cap \mathcal{S} \subset \Delta_{ij} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}_{ij}$$

de plus, $[P_i P_{ij}]$ étant un diamètre de Δ_j ,

$$(\forall M \in \Delta_j) \quad P_i M \leq P_i P_{ij} = d < d_i$$

or, si $P_i M < d_i$ alors $M \notin \mathcal{S}_{hij}$; par suite,

$$\Delta_j \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{ij} \setminus ((\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij}) \setminus \{P_i\}) = (\mathcal{S}_{ij} \setminus (\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij})) \cup (\mathcal{S}_{ij} \cap \{P_i\}) = \emptyset \cup \{P_i\} = \{P_i\}$$

d'où l'on déduit, puisque naturellement $P_i \in \Delta_j \cap \mathcal{S}$, que $\Delta_j \cap \mathcal{S} = \{P_i\}$. Par ailleurs, sachant que $P_{ij} \in \Delta_j$, il ne reste qu'à étudier la position de P_{hi} par rapport à Δ_j . Si $P_{hi} \in \Delta_j$, alors $[P_i P_{hi}] \subset \Delta_j$ puisque P_{ij} est sur le cercle limitant Δ_j ; dès lors que $P_i P_{hi} = d$, diamètre de Δ_j , $[P_i P_{hi}]$ est donc un diamètre de Δ_j , donc $P_{hi} = P_{ij}$ et par suite $\widehat{P_h P_i P_j} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. La première égalité se simplifie donc en

$$\Delta_j \cap \mathcal{S}' = \{P_i\} \cup \{P_{ij}\}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Les résultats qui précèdent permettent de prouver que pour toute configuration locale de deux arêtes concourantes, il est possible de proposer une subdivision en arêtes dont les petits disques ne contiennent aucun point de \mathcal{S} augmenté des points insérés. Pour pouvoir généraliser cette proposition à la totalité de Γ , il convient d'abord de remarquer que les arêtes issues de deux arêtes disjointes n'ont d'effets réciproques que jusqu'à un nombre fini d'itérations; c'est précisément l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.5 *Pour tout couple (f, f') d'arêtes disjointes et non dégénérées de Γ , un nombre fini de projections orthogonales quelconques de points distincts de f' sur f procure une subdivision de f en arêtes non dégénérées dont les petits disques associés ne rencontrent pas f' .*

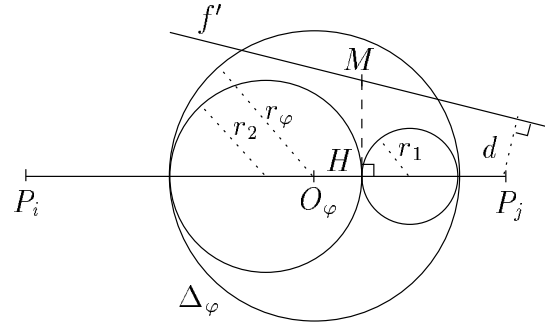


FIG. 16 – Arêtes disjointes, subdivision de l'une par projection et petits disques associés.

Preuve : Convenons que $f = [P_i P_j]$, et considérons une arête $\varphi \subset [P_i P_j]$, obtenue après un nombre fini de subdivisions de f ; on désigne respectivement par Δ_φ , O_φ et r le petit disque de φ , son centre et son rayon. Par ailleurs, on définit la distance d de f à f' par

$$d = \min_{(M,N) \in (f,f')} MN$$

il est donc évident que tout disque centré sur f , de rayon $r < d$, ne rencontre pas f' , et inversement. Si $M \in f' \cap \Delta_\varphi$, en désignant par H le projeté orthogonal de M sur f , il est clair que $H \in \varphi$; on a, de plus,

$$0 < d \leq MH \leq O_\varphi M \leq r < P_i P_j$$

donc

$$0 \leq O_\varphi H = \sqrt{O_\varphi M^2 - MH^2} < \sqrt{P_i P_j^2 - d^2}$$

par suite, les rayons $r_1 = \frac{r - O_\varphi H}{2}$ et $r_2 = \frac{r + O_\varphi H}{2}$ des petits disques associés aux arêtes obtenues par subdivision de φ de part et d'autre de H vérifient

$$0 < r_1 \leq r_2 < \frac{P_i P_j + \sqrt{P_i P_j^2 - d^2}}{2} = \frac{P_i P_j}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{P_i P_j^2}} \right) = \varepsilon P_i P_j$$

avec $0 < \varepsilon < 1$, puisque $0 < d < P_i P_j$, ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n = 0$, et donc qu'à partir d'un certain rang n_0 , on a $\varepsilon^n P_i P_j < d$. Pour tout disque nouvellement créé rencontrant f' , il suffit de réitérer le raisonnement, et l'on est donc certain qu'au plus un nombre fini de projections de points de f' sur $[P_i P_j]$ suffit à ce qu'aucun des petits disques associés aux arêtes subdivisant f ne recouvre f' . \square

Il est clair que le Lemme 3.5 est une condition suffisante, et qu'en fait la disjonction n'est pas requise en général. Il suffit en fait que les petits disques associés à la subdivision de f ne contiennent aucun point de f' qui soit également dans \mathcal{S} augmenté des points insérés.

3.2 Un algorithme brutal

Les résultats qui précèdent permettent de proposer un algorithme itératif de subdivisions du champ de contraintes initial Γ , produisant un champ de contraintes final Γ' associé à un nouveau nuage de points \mathcal{S}' , réunion de \mathcal{S} avec l'ensemble des nouveaux points insérés.

On définit, pour toute arête $f = [P_i P_j]$ dont le petit disque contient un point $P_n \in \mathcal{S}$, la fonction **projection** (P_i, P_j, P_n) (Figure 12), qui divise f en $[P_i M]$ et $[M P_j]$, où M est la projection orthogonale de P_n sur f . Par ailleurs, la discussion qui précède met en évidence la nécessité d'un traitement spécifique à appliquer à la des arêtes adjacentes formant un angle aigu, puisque subdiviser l'une peut affecter l'autre. Plus précisément, les angles aigus contenant au moins une arête non admissible doivent être "nettoyés", afin d'éviter une suite de subdivisions alternées qui pourraient entraîner une divergence, en particulier lorsque de nombreuses arêtes convergent en un même sommet. Pour cette raison est introduite la fonction **nettoyage** (P_i, P_j, d) , pour tout réel non nul $d < P_i P_j$, qui subdivise f en deux nouvelles arêtes $[P_i M]$ et $[M P_j]$ telles que $P_i M = d$.

L'algorithme que nous proposons requiert en entrée un champ de contraintes Γ ; pour toute arête $[P_i P_j]$, on rappelle que $\mathcal{S}_{ij} = \Delta_{ij} \cap \mathcal{S}$. On convient, lorsque deux arêtes ϕ et ψ partagent une extrémité P^* , de désigner par $\widehat{\phi P^* \psi}$ la mesure de l'angle de droites qu'elles définissent. Enfin, on note $\Gamma|_{P^*}$ l'ensemble des arêtes de Γ admettant P^* pour extrémité.

Algorithme 3.1 (Subdivision brutale des arêtes)

1. *Initialisation : Tester la Delaunay-admissibilité forte des arêtes de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ de celles qui ne sont pas fortement-admissibles.*
2. *Tant que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est non vide, faire :*
 - (a) *Pour l'arête $f = [P_i P_j]$ du sommet de $\mathcal{T}(\Gamma)$, faire :*
 - *si f ne forme pas d'angle aigu avec ses éventuelles arêtes incidentes,*
 - i. *choisir $P_n \in \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$.*
 - ii. **projection** (P_i, P_j, P_n) ;
 - *sinon, pour chaque extrémité P_* de f en laquelle il existe au moins un angle aigu,*
 - i. $\mathcal{L} = \left\{ \phi \in \Gamma|_{P^*} : (\exists \psi \in \Gamma|_{P^*} \setminus \{\phi\}) \widehat{\phi P_* \psi} < \frac{\pi}{2} \right\}$;
 - ii. $d_* = \min MP_*$, $M \in \mathcal{S} \cap \bigcup_{\phi \in \mathcal{L}} \Delta_\phi \setminus \{P_*\}$;
 - iii. *fixer $0 < d < d_*$;*
 - iv. *pour chaque $\phi = [P_* M] \in \mathcal{L}$, **nettoyage** (P_*, M, d) .*
 - (b) *Mettre à jour \mathcal{S} , Γ et $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

La liste \mathcal{L} est constituée par toutes les arêtes incidentes en P^* , formant un angle aigu avec au moins une autre telle arête. Si plus de trois arêtes concourent en un point, ce qui est en particulier le cas

lorsque Γ est obtenue par discrétisation d'un arc géométrique non simple, plusieurs “paquets” d'arêtes, séparés par des angles aigus, peuvent ainsi être trouvés.

On établit à présent la convergence de cet algorithme.

Théorème 3.1 *L'Algorithme 3.1 termine en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Considérons une arête $f \in \Gamma$ qui n'est pas Delaunay-admissible, et l'on désigne respectivement par n et \mathcal{I}_f le nombre de points de \mathcal{S} privé des extrémités de f qui sont contenus dans le petit disque fermé associé à cette arête et l'ensemble, éventuellement vide, des arêtes de Γ qui sont incidentes à f . Le Lemme 3.5 montre qu'en temps fini deux arêtes disjointes n'ont plus d'effets réciproques sur leur Delaunay-admissibilité, ce qui entraîne qu'après un certain nombre d'itérations, seules les configurations d'arêtes incidentes sont susceptibles d'entraîner une divergence. Il convient donc de les étudier.

1. si f ne forme un angle aigu avec aucune arête de \mathcal{I}_f , alors le Corollaire 3.1 assure qu'en un nombre maximal de n itérations, l'algorithme produit une subdivision de f en arêtes de type 0, donc fortement Delaunay-admissibles. De plus, le Lemme 3.2 montre que cette partition n'est d'aucun effet sur les arêtes de \mathcal{I}_f .
2. si f forme en au moins une de ses extrémités, notée P_* , un angle aigu avec au moins une arête de \mathcal{I}_f , alors chaque $\phi_k \in \mathcal{L}$ est partagée en ϕ_k^1 , d'extrémité P_* , et ϕ_k^2 , qui forme avec ϕ_k un angle plat, donc obtus ou droits. La configuration formée par les ϕ_k^1 est donc à nouveau celle d'une succession d'angles aigus mais, d'après le Lemme 3.3, $\theta_2(\phi_k^1) = 0$, donc les ϕ_k^1 sont fortement Delaunay-admissibles, ce qui est donc en particulier le cas de f^1 . Quant à f^2 , qui peut éventuellement former un angle aigu en son autre extrémité, au plus un autre tel traitement ramène le problème au cas 1., traité en un nombre fini d'itérations ; l'algorithme produit donc une subdivision de f en arêtes de type 0, donc fortement Delaunay-admissibles, sans influence sur les arêtes qui lui sont incidentes.

Les angles aigus étant en nombre fini et fixé, puisque les subdivisions ne créent pas d'autres angles que des angles plats, le problème sera au plus ramené, en un nombre fini d'itérations, à celui d'arêtes non fortement Delaunay-admissibles ne formant avec leurs incidentes que des angles obtus ou droits, l'algorithme terminant alors après un nombre fini d'itérations. \square

L'Algorithme 3.1 est robuste, mais couteux en termes d'insertion de points, en particulier lorsque plusieurs arêtes convergent en un même sommet, comme le montre l'exemple suivant.

Le champ de contraintes Γ présenté Figure 17-(i) n'est pas fortement Delaunay-admissible ; en effet, les segments $[P_2P_3]$ et $[P_3P_4]$ n'apparaissent pas dans le recouvrement de Delaunay⁵ de l'enveloppe convexe des sept points constituant \mathcal{S} (Figure 17-(ii)).

L'Algorithme 3.1 redéfinit Γ en Γ' , nouveau champ de contraintes associé à \mathcal{S}' , ensemble de points créé par ajout de $\{P_7, P_8, P_9, P_{10}\}$ à \mathcal{S} . Comme le montre la Figure 18-(i), la fonction **nettoyage** a été utilisée autour du point P_3 , conformément au traitement prévu pour les angles aigus. Puisque Γ' est fortement Delaunay-admissible, elle apparaît effectivement dans la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' présentée Figure 18-(ii).

On est cependant légitimement fondé à s'interroger sur le nombre de nouveaux points insérés pour traiter un cas aussi simple. En particulier, de simples applications itérées de la fonction **projection** convergent également vers une contrainte Γ'' fortement Delaunay-admissible, qui de surcroît requiert un nombre inférieur d'insertions de points. On voit en effet, Figure 19, que deux points suffisent à assurer une satisfaction faible de Γ .

Il ressort de l'étude de cet exemple que si l'Algorithme 3.1 est robuste, comme le montre le Théorème 3.1, il est en revanche trop brutal. Plus précisément, la condition suffisante de convergence pour les champs de contraintes comportant des angles aigus introduite par le Lemme 3.4 est beaucoup trop

5. Les points étant ici en position générale, ce recouvrement est une triangulation.

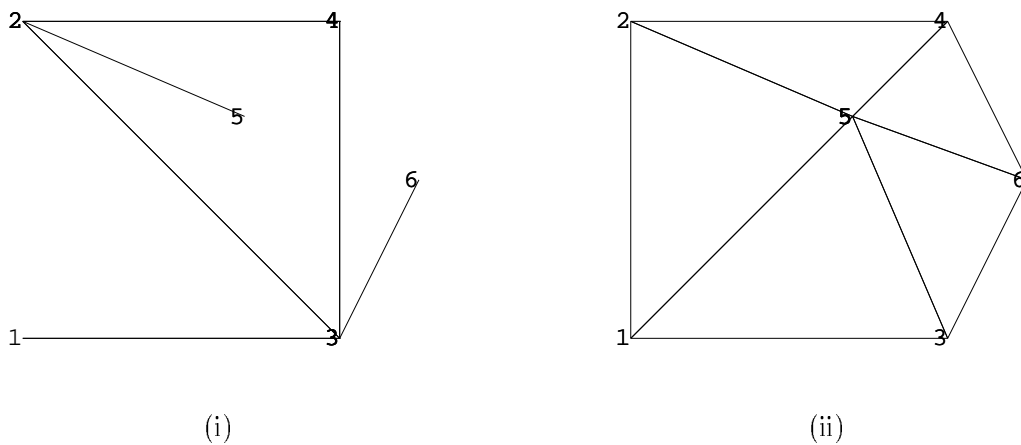


FIG. 17 – (i) : contrainte initiale Γ , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.

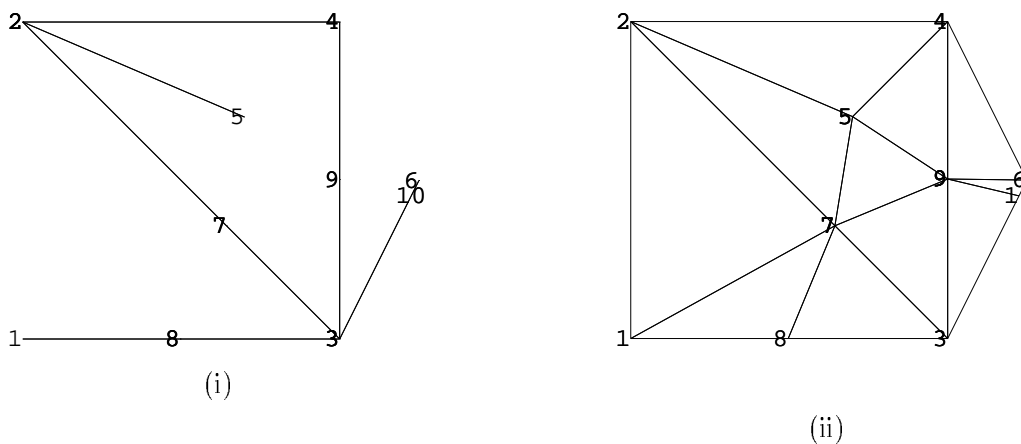


FIG. 18 – (i) : contrainte redéfinie Γ' , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}')$.

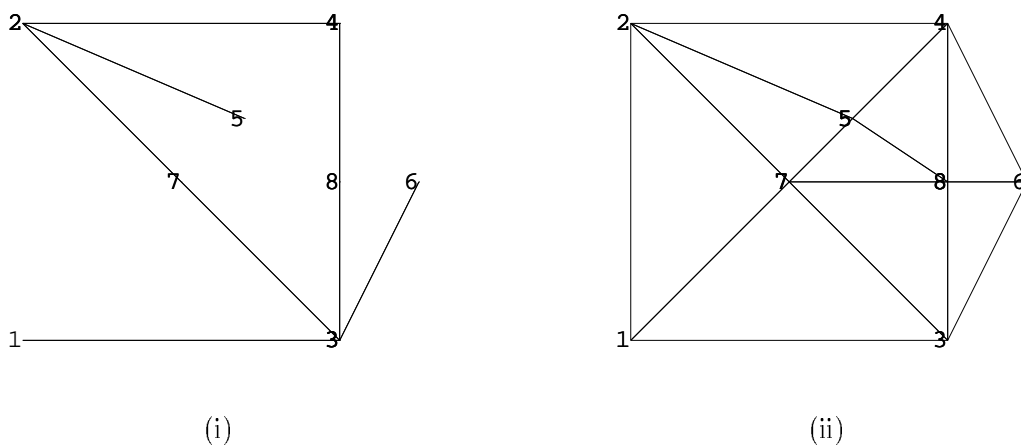


FIG. 19 – (i) : contrainte redéfinie Γ'' , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}'')$.

forte. Or, un algorithme appliquant itérativement la fonction **projection** ne converge pas, comme le montre le contre-exemple présenté Figure 20 : la contrainte initiale Γ (i) n'est pas fortement Delaunay-admissible (ii), mais l'Algorithme 3.1 permet une satisfaction faible de Γ (iii), par nettoyage autour du point P_1 . En revanche, le même algorithme, privé de son traitement spécifique des angles aigus par **projection** ne converge pas, comme l'illustre la Figure 21 : après chaque "tour" de P_1 , le même motif est retrouvé, aboutissant rapidement, au regard de la précision numérique, à la création d'une singularité. On est donc amené à s'interroger sur une condition suffisante plus faible que la simple existence d'un angle aigu, limitant l'emploi de la fonction **nettoyage** tout en conservant la robustesse de l'algorithme.

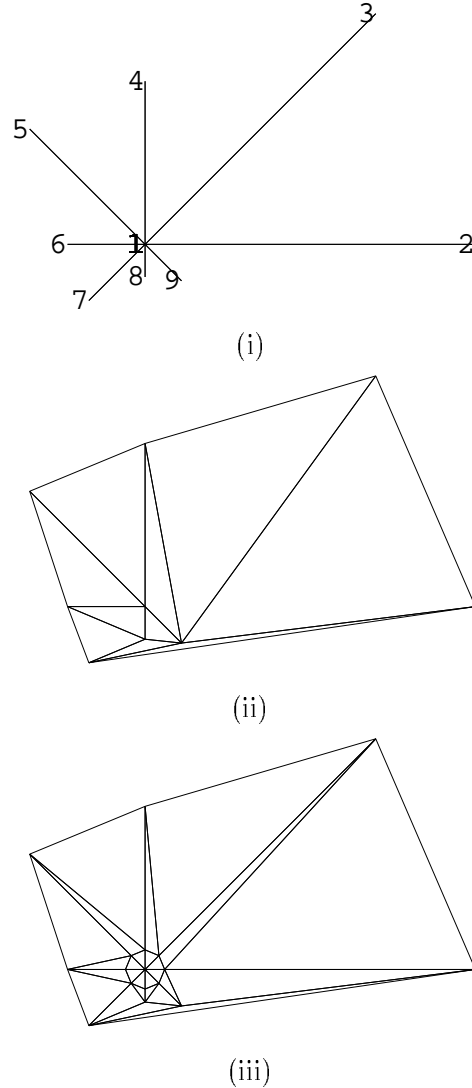


FIG. 20 – (i) : contrainte initiale Γ associée à \mathcal{S} , (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}')$.

3.3 Un algorithme plus subtil

Préalablement à l'introduction d'un tel algorithme, on introduit le vocabulaire suivant :

Définition 3.1 *Si un point $P_i \in \mathcal{S}$ est extrémité d'au moins deux arêtes de Γ formant un angle aigu, on appelle noeud associé à P_i l'ensemble de toutes les arêtes de la contrainte concourant en ce point,*

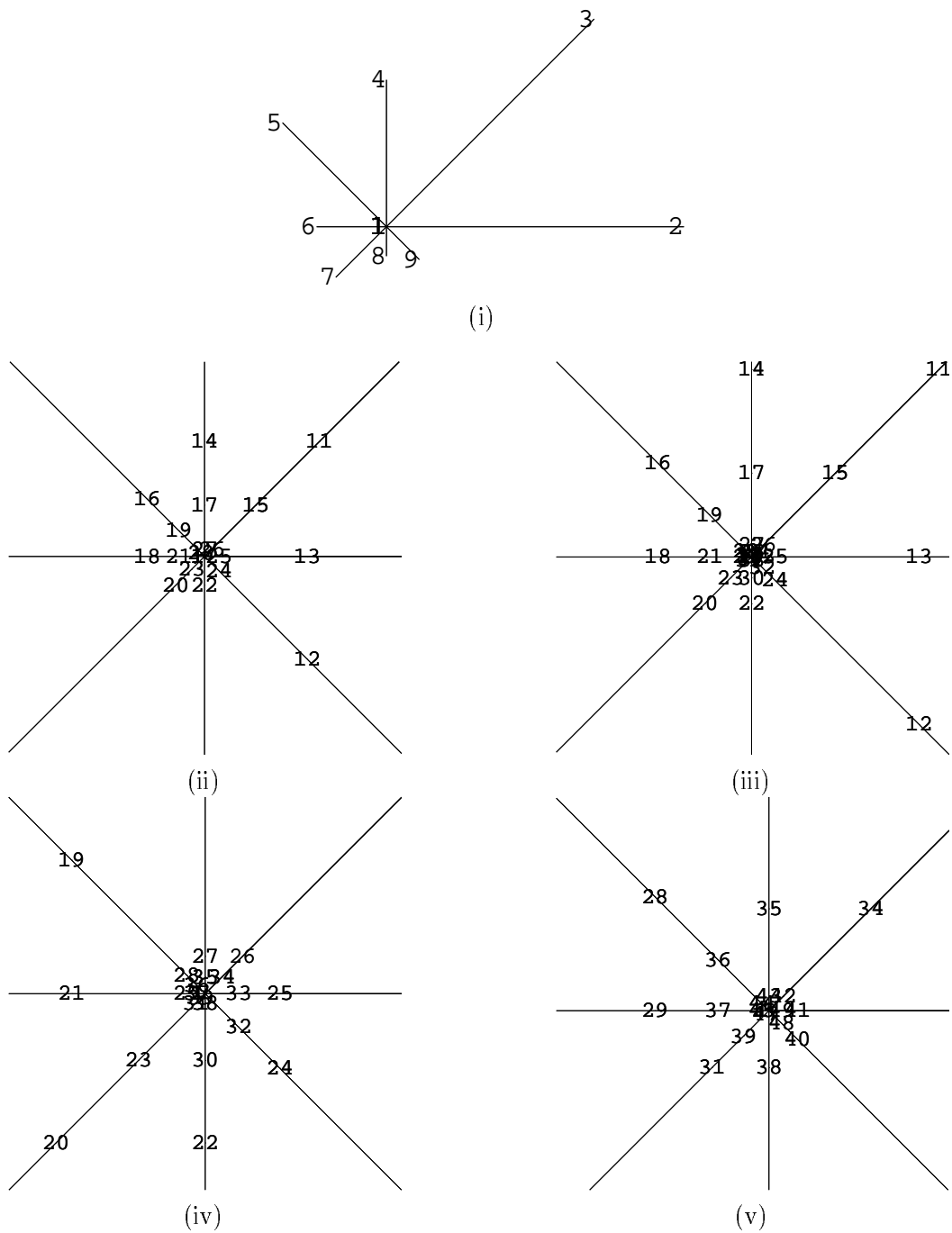


FIG. 21 – (i) : contrainte initiale Γ , (ii) à (v) : projections seules, agrandissements successifs autour de P_1 .

qualifié de centre nodal. S'il est possible de trouver une suite de ces arêtes, formée de telle sorte que deux termes successifs forment toujours un angle aigu, qui soit cyclique, on dit que ce noeud est fermé. Dans le cas contraire, il est qualifié d'ouvert. Enfin, on appelle support du noeud associé à P_i l'ensemble minimal de demi-droites d'origine P_i contenant ce noeud.

Il est à noter que la configuration formée par deux arêtes partageant une extrémité ne constitue un noeud que si l'angle qu'elles forment est aigu.

Le but des quelques résultats qui suivent est d'établir que pour un noeud ouvert, l'emploi de la fonction **nettoyage** est inutile. On prouve d'abord qu'en un nombre fini d'itérations, les points de \mathcal{S} contenus dans la réunion des petits disques des arêtes constitutives d'un noeud se trouvent sur le support de celui-ci. On note $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$, et l'on convient de désigner par \mathcal{S}_n le nuage de points obtenus après $n \in \mathbb{N}$ applications de **projection** ou **nettoyage**.

Lemme 3.6 *Soit \mathcal{N} le noeud associé à un point $P_i \in \mathcal{S}$, de support η . Pour toute suite d'applications quelconques de **projection** sur les arêtes reliées à P_i , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les petits disques des arêtes de \mathcal{N}_n , noeud associé à P_i et de support η produit à l'itération n , ne contiennent pas de points de $\mathcal{S}_n \setminus \eta$.*

Preuve : Soit une suite quelconque d'applications de **projection** sur les arêtes du noeud de support η . D'après le Lemme 3.5, après un nombre fini de projections orthogonales, les petits disques associés aux arêtes d'extrémité P_i ne rencontrent plus les arêtes disjointes de ce point. Par suite, les points insérés sur ces dernières ne sont dans aucun des petits disques du noeud associé à P_i , à partir d'un certain rang m . Désignons par Q^* le point de $\mathcal{S}_m \setminus \eta$ le plus proche de P_i . Une démonstration similaire à celle du Lemme 3.5 montre que la suite des (l_n^i) , longueur de la plus grande des arêtes reliées à P_i à l'itération n , tend vers 0 et par suite, qu'à partir d'un certain rang $n_0 \geq m$ on a $l_n^i < P_i Q^*$. Ainsi, pour toute arête ϕ_n d'extrémité P_i à l'itération $n \geq n_0$, on a $Q^* \notin \Delta_{\phi_n}$, donc pour tout $M \in \mathcal{S}_m \setminus \eta$, nécessairement $M \notin \Delta_{\phi_n}$. Or, tout Δ_{ϕ_n} est inclus dans un Δ_{ϕ_m} , et il a été montré qu'aucun des points de $\mathcal{S}_{n_0} \setminus \mathcal{S}_m$ n'appartient à η , ce qui entraîne qu'aucun des Δ_{ϕ_n} , pour $n \geq n_0$, ne contient de point de $\mathcal{S}_m \setminus \eta$, d'où le résultat. \square

Le Lemme 3.6 a pour importante conséquence la certitude qu'au plus en un nombre fini d'itérations de la fonction **projection** sur les arêtes reliées à un centre nodal, il suffit d'examiner les positions relatives des petits disques des arêtes du noeud et des extrémités de ces arêtes. En particulier, dans le cas le plus simple de noeud, *i.e.*, lorsque celui-ci est composé de deux arêtes formant un angle aigu, on montre que la fonction **nettoyage** n'est pas nécessaire à la convergence de l'Algorithme 3.1.

Lemme 3.7 *Si le champ de contraintes Γ est simple, c'est-à-dire si chaque point de \mathcal{S} est extrémité d'au plus une arête de Γ , alors des applications itérées de **projection**, telles qu'elles sont décrites dans l'Algorithme 3.1 terminent en un temps fini.*

Preuve : En raison des Théorème 3.1 et Lemme 3.6, il suffit de prouver qu'une configuration formée par un noeud simple ne peut conduire l'algorithme à la divergence. Considérons un noeud simple quelconque de Γ , soit une configuration de deux arêtes formant un angle aigu en un point P_i . D'après le Lemme 3.6, on a la certitude que pour toute suite d'applications de **projection** sur ce noeud, on est ramené en un nombre fini d'itérations à l'une des deux configurations de la Figure 22. Dans le cas correspondant à (i), les deux arêtes du noeud sont de type 0, donc toutes deux fortement Delaunay-admissibles. La configuration représentée en (ii) est sensiblement plus complexe: $[P_i P_h]$ est de type 0, alors que $[P_i P_j]$ est de type 1.0 ou 1.1. Dans le premier cas, les deux arêtes sont fortement Delaunay-admissibles. Dans le second cas, P_h sera projeté orthogonalement en un nouveau point M , intersection de $[P_i P_j]$ et de \mathcal{C}_{ih} . Ne s'intéressant alors, selon les Lemme 3.2 et Lemme 3.5, qu'aux arêtes constitutives

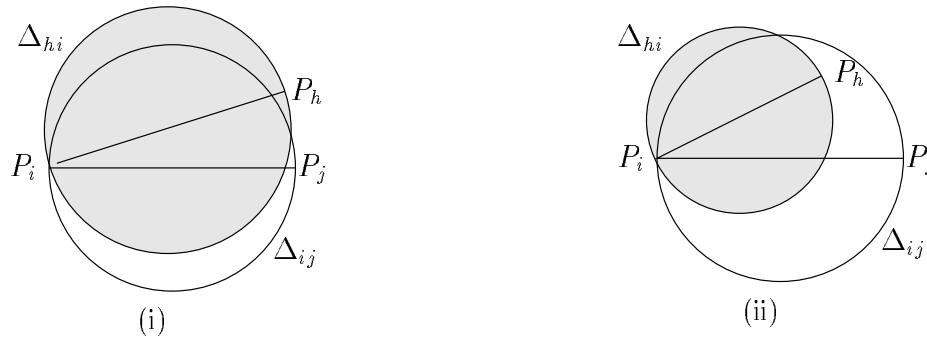


FIG. 22 – Noeud simple : configuration formée par un seul angle aigu.

du noeud, *i.e.*, $[P_i P_h]$ et $[P_i M]$, il est clair que la première est de type 1.0 (à cause du point M), alors que la seconde est de type 0, ce qui entraîne leur forte Delaunay-admissibilité.

□

L'exemple présenté Figure 23 illustre le Lemme 3.7 : le champ de contraintes Γ considéré n'est pas fortement Delaunay-admissible, puisque ses arêtes $[P_2 P_3]$ et $[P_5 P_6]$ manquent dans la triangulation de Delaunay de son enveloppe convexe. La succession d'angles aigus est donc un cas typique d'inutilité de la fonction **nettoyage**.



FIG. 23 – Contrainte non fortement Delaunay-admissible. (i) : contrainte initiale, (ii) : triangulation de Delaunay.

Comme le montre la Figure 23, l'Algorithme 3.1, privé du traitement des noeuds par la fonction **nettoyage**, redéfinit *a priori* Γ en Γ' , relativement à un ensemble de points augmenté. Les points insérés (P_8 et P_9) assurent la satisfaction faible de Γ , puisque ses arêtes manquantes (au sens de la satisfaction forte) sont représentées par leurs subdivisions.

Afin de limiter encore l'emploi de **projection**, la condition suffisante de convergence est à nouveau affaiblie : un algorithme n'employant **nettoyage** que sur les noeuds fermés est proposé, et sa convergence établie. On suppose donné en entrée un champ de contraintes Γ ; pour toute arête $[P_i P_j]$, on rappelle que $\mathcal{S}_{ij} = \Delta_{ij} \cap \mathcal{S}$.



FIG. 24 – Contrainte fortement Delaunay-admissible. (i) : contrainte redéfinie, (ii) : triangulation de Delaunay.

Algorithme 3.2 (Subdivision des arêtes)

1. *Initialisation :*

- (a) *Tester la Delaunay-admissibilité forte des arêtes de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ de celles qui ne sont pas fortement-admissibles ;*
- (b) *Détecter les centres nodaux de Γ .*

2. *Tant que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est non vide, faire :*

- *si $\mathcal{T}(\Gamma)$ contient une arête $f = [P_i P_j]$ telle que l'une au moins de ses extrémités P_* soit un centre nodal, faire :*
 - (a) *constituer le noeud \mathcal{N} associé à P_* ;*
 - (b) $d_* = \min MP_*$, $M \in \mathcal{S} \cap \bigcup_{\phi \in \mathcal{N}} \Delta_\phi \setminus \{P_*\}$;
 - (c) *fixer $0 < d < d_*$;*
 - (d) *pour chaque $\phi = [P_* M] \in \mathcal{N}$, **nettoyage**(P_* , M , d).*
- *sinon, pour l'arête $f = [P_i P_j]$ du sommet de $\mathcal{T}(\Gamma)$, faire :*
 - (a) *choisir $P_n \in \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$;*
 - (b) **projection**(P_i, P_j, P_n).
- *Mettre à jour \mathcal{S} , Γ et $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

Théorème 3.2 *L'Algorithme 3.2 termine en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Il suffit d'itérer le raisonnement proposé pour la démonstration du Lemme 3.7, qui termine nécessairement puisque, pour tout noeud ouvert, le nombre de projections récursives dans le même sens de parcours autour du centre nodal est fini. □

L'implémentation de cet algorithme utilise quelques astuces, afin d'accroître sa vitesse d'exécution. Un tri par boîtes⁶ est en particulier utilisé, afin d'optimiser la recherche des points de \mathcal{S} contenus dans

6. Méthode plus connue sous sa dénomination en langue anglaise de *bucket-sorting*.

un petit disque donné. Par ailleurs, les arêtes de $\mathcal{T}(\Gamma)$ sont classées par ordre décroissant de nombre de points de \mathcal{S} contenus dans leurs petits disques, considérant que plus ce nombre est élevé, plus une arête semble problématique. Cette heuristique n’a pas été démontrée ; elle est d’ailleurs fausse en général. Cependant, on constate une nette amélioration globale des résultats corollairement à son emploi.

4 Exemples d’illustration

Quelques exemples de redéfinitions *a priori* de champs de contraintes sont présentés ici, ainsi que des tableaux donnant les principales caractéristiques des contraintes avant et après redéfinition d’une part, de leurs triangulations de Delaunay d’autre part. On désigne par Algorithme 3.1’ une version modifiée de l’Algorithme 3.1, qui limite l’emploi de la fonction **nettoyage** aux noeuds formés de plus de deux arêtes incidentes. Comme le prouve le Lemme 3.2, ceci conduit à employer cette fonction “plus” que ne l’exige la convergence ; néanmoins, comme le montrent certains des exemples qui suivent, cette sur-utilisation sur des noeuds ouverts à trois arêtes ou plus peut parfois améliorer la vitesse de convergence.

Par souci de concision, si Γ_i est un champ de contraintes, on désignera par Γ'_i et Γ''_i ses redéfinitions respectives par les Algorithmes 3.2 et 3.1’ ; ces contraintes seront naturellement associées respectivement aux ensembles de points \mathcal{S}_i , \mathcal{S}'_i et \mathcal{S}''_i . Enfin, on désignera naturellement par N_p , N'_p , N''_p , N_f , N'_f et N''_f les nombres de points et d’arêtes correspondants.

	N_p	N_f	N'_p	N'_f	N''_p	N''_f
1	8	7	17	16	16	15
2	21	20	174	173	134	133
3	22	24	58	60	81	83
4	19	19	22	22	22	22
5	18	19	45	46	\emptyset	\emptyset

TAB. 1 – Statistiques relatives à la redéfinition *a priori* de la contrainte.

Les temps de calcul nécessaires sur une station HP-PA 8000 sont tous inférieurs à une seconde. Concernant les triangulations de Delaunay des enveloppes convexes, N_t , N'_t et N''_t désignent les nombres de triangles construits respectivement pour $\text{Conv}(\mathcal{S}_i)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_i)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_i)$. On note N_m le nombre d’arêtes de la contrainte initiale Γ_i absentes de la triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_i)$; cette quantité n’est pas présentée pour les triangulations des nuages de points associés aux contraintes redéfinies, puisqu’elle vaut alors toujours 0. Les calculs de dégradation des triangles sont effectués en utilisant la formule suivante :

$$\mathcal{D}_t = \alpha \frac{h_t}{r_t}$$

où r_t , h_t et α désignent respectivement le rayon du cercle inscrit, la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte qu’un triangle équilatéral soit de dégradation unité⁷. Ainsi définie, la dégradation d’un triangle appartient à $[1; +\infty]$, et l’on désignera par \mathcal{D}'_+ , \mathcal{D}'_- , $\overline{\mathcal{D}'}$, \mathcal{D}''_+ , \mathcal{D}''_- et $\overline{\mathcal{D}''}$ respectivement la meilleure, la plus mauvaise et la moyenne des triangulations.

Les Figures 25-(i), 26-(i) et 27-(i) présentent trois exemples de champs de contraintes, respectivement Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles relativement aux ensembles de points initiaux, comme le montrent les sous-figures (ii). Après redéfinitions par les deux algorithmes, les triangulations des enveloppes convexes des nouveaux nuages de points construisent les nouvelles contraintes, ce qui assure une satisfaction simple des contraintes initiales. Il est très clair que les résultats obtenus par les deux algorithmes diffèrent notablement dans chaque cas. Par ailleurs, bien qu’il ait été établi que **nettoyage** ne soit pas nécessaire pour les noeuds ouverts, on voit ici que la simple

7. Un calcul élémentaire montre que $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

	N_t	N_m	N'_t	\mathcal{D}'_+	\mathcal{D}'_-	$\overline{\mathcal{D}'}$	N''_t	\mathcal{D}''_+	\mathcal{D}''_-	$\overline{\mathcal{D}''}$
1	9	3	27	1,01	14,2	2,54	25	1,01	14,2	2,89
2	33	15	339	1,06	151	5,48	258	1,06	$2,69.10^8$	$1,04.10^6$
3	34	13	106	1,09	24,8	3,10	152	1,05	$7,85.10^6$	$8,37.10^4$
4	30	2	36	1,04	64,1	8,66	36	1,04	64,1	8,66
5	27	8	81	1,02	36,4	3,92	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

TAB. 2 – Statistiques relatives aux Delaunay-triangulations des ensembles de points.

interdiction de son emploi aux noeuds de moins de trois arêtes peut parfois conduire à de meilleurs résultats que ceux de l'Algorithme 3.2, en termes de nombre de points créés (Tableau 1). En revanche, si l'on considère la qualité des triangulations construites, force est de constater que ce dernier algorithme conduit à de très mauvais résultats (Tableau 2). Cette dernière remarque mérite cependant d'être nuancée, dans la mesure où le choix de la distance d du Lemme 3.4 n'a pas été discuté, sa valeur ayant été arbitrairement fixée à la moitié de d_i . Par conséquent, d'inévitables chocs de taille se produisent ; une détermination plus fine de d améliorerait vraisemblablement les résultats. Il est enfin à remarquer, Figure 26, que lorsqu'un grand nombre d'arêtes convergent en un même centre de noeud ouvert, les itérations successives de **projection** tendent à reproduire le motif obtenu en une seule application de **nettoyage**, ce qui explique pourquoi l'Algorithme 3.1' est dans ce cas le plus rapide.

La contrainte Γ_4 (Figure 28) est obtenue par discrétisation d'un arc simple constituant la frontière d'une partie à deux composantes connexes de \mathbb{R}^2 . La triangulation de l'enveloppe convexe des points de \mathcal{S}_4 n'est pas fortement Delaunay-admissible. L'arc discrétisé étant simple, la contrainte ne contient donc pas de noeud et les deux algorithmes aboutissent par suite au même résultat, à savoir une nouvelle contrainte fortement Delaunay-admissible.

Le dernier exemple proposé est constitué par la contrainte Γ_5 , Figure 29, qui comporte deux noeuds fermés. Une contrainte Γ'_5 , fortement Delaunay-admissible, est trouvée par l'Algorithme 3.2, alors que l'Algorithme 3.1' n'est pas réputé convergent pour de tels cas.

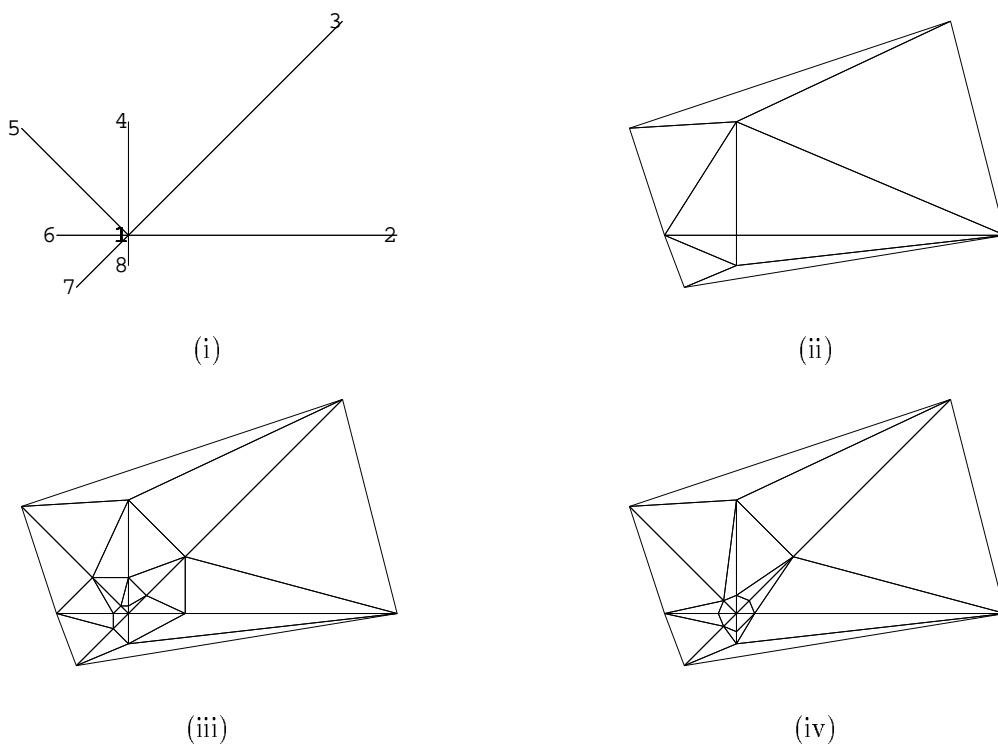


FIG. 25 – Exemple de redéfinition *a priori* d'un champ de contraintes. (i) : la contrainte Γ_1 associée à \mathcal{S}_1 , (ii), (iii) et (iv) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S}_1)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_1)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_1)$.

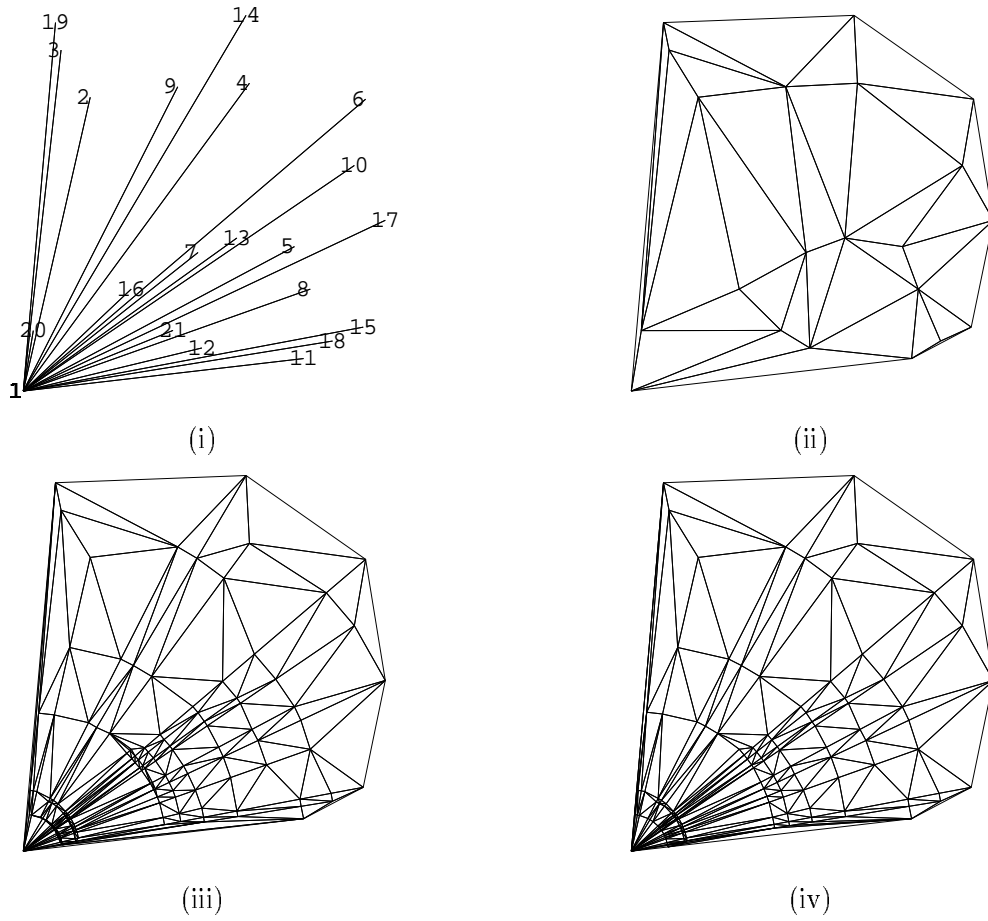
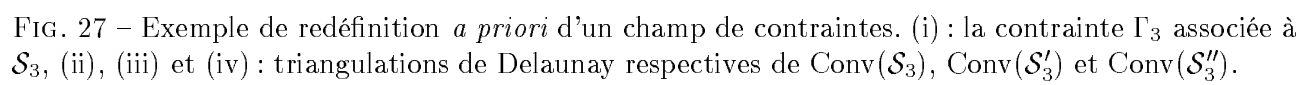
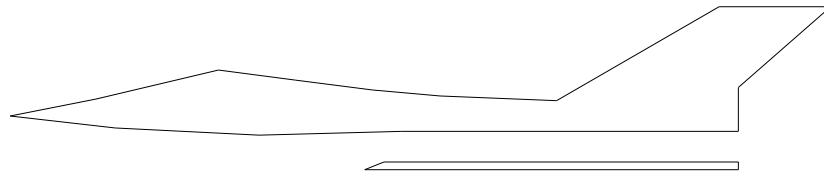
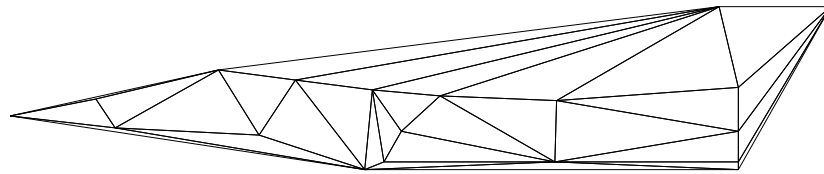


FIG. 26 – Exemple de redéfinition *a priori* d'un champ de contraintes. (i) : la contrainte Γ_2 associée à \mathcal{S}_2 , (ii), (iii) et (iv) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S}_2)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_2)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_2)$.

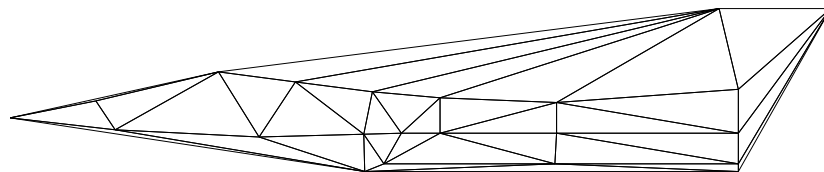




(i)

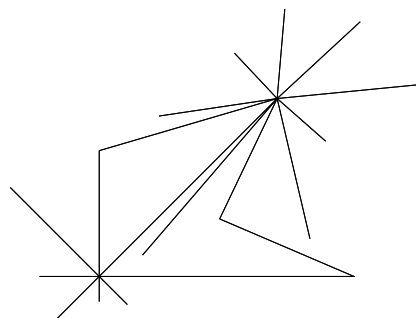


(ii)

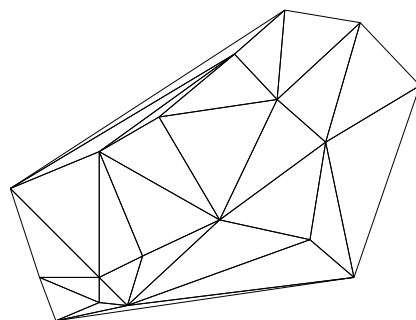


(iii)

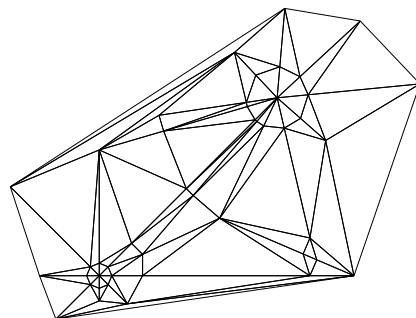
FIG. 28 – Exemple de redéfinition *a priori* d'une contrainte de frontière. (i) : Frontière devant être repectée, (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_3)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}'_3)$.



(i)



(ii)



(iii)

FIG. 29 – Exemple de redéfinition *a priori* d'une contrainte de frontière. (i) : la contrainte Γ_5 associée à \mathcal{S}_5 , (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_5)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}'_5)$.

5 Conclusion et perspectives

Dans ce rapport a été brièvement rappelé l'essentiel des propriétés des triangulations de Delaunay en dimension 2. Pour un champ de contraintes donné (*i.e.*, une liste d'arêtes) Γ relatif à un ensemble fini de points $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, une classification géométrique des arêtes a été introduite. Celle-ci permet de déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence *a priori* (*i.e.*, sans construction d'une triangulation), d'une arête quelconque de Γ dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .

En corollaire, un algorithme convergent de redéfinition *a priori* d'une telle contrainte bi-dimensionnelle Γ a été proposé, basé sur quelques propriétés géométriques des cercles et des disques, par insertions de points sur les arêtes litigieuses. Le champ de contraintes Γ' ainsi obtenu, associé à un nouvel ensemble de points \mathcal{S}' contenant \mathcal{S} est fortement Delaunay-admissible ; en d'autres termes, toutes les arêtes de Γ' seront construites par toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' . Le nombre de nouveaux points ajoutés à \mathcal{S} a été fortement diminué en faisant apparaître un résultat sur les angles aigus ; il n'est toutefois pas minimal en général, puisque que la méthode itérative d'insertion s'applique localement, arête par arête.

D'autres développements potentiels peuvent être mentionnés :

- recherche du nombre minimal de points à insérer pour une contrainte donnée ;
- établissement d'un algorithme déterminant la position de tels points, et les insérant ;
- application à la recherche du squelette (axe médian) d'un polygone ;
- application à la détermination d'un algorithme convergent en dimension 3.

Références

- [Borouchaki-1994] H. BOROUCHAKI, Triangulation sous contrainte en dimension quelconque, *RR INRIA* **2373**, 1994.
- [Delaunay-1934] B. DELAUNAY, Sur la sphère vide, *Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat.*, 793-800, 1934.
- [Frey-1993] P.J. FREY, Génération automatique de maillages 3D dans des ensembles discrets. Application biomédicale aux méthodes d'éléments finis. Thèse, Université de Strasbourg, 1993.
- [George *et al.* 1992] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **92**, 269-288, 1992.
- [George-1997] P.L. GEORGE, Improvement on Delaunay based tridimensional automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design* **25** (3-4), 297-317, 1997.
- [George,Borouchaki-1997] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Triangulation de Delaunay et maillage, Hermes, 1997.
- [Hecht,Saltel-1990] F. HECHT ET E. SALTEL, EMC2 un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels, *Rapport Technique INRIA*, no 118, avril 1990.
- [Löhner-1996] R. LÖHNER, Extensions and improvements of the advancing-front grid generation technique, *Commun. numer. methods eng.*, **12**, 683-702, 1996.
- [Pébay-1998] PH.P. PÉBAY, Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible, *Rapport de Recherche INRIA*, no 3369, mars 1998.
- [Ruppert,Seidel-1992] J. RUPPERT AND R. SEIDEL, On the difficulty of triangulating three dimensional non-convex polyhedra, *Discrete Computational Geometry* **7**, 227-253, 1992.
- [Sapidis,Perruccio-1991] N. SAPIDIS AND R. PERUCCHIO, Delaunay triangulations of arbitrarily shaped planar domains, *Computer Aided Geometric Design* **8**, 412-437, 1991.
- [Schönhart-1928] E. SCHÖNHART, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, *Mathematisch Annalen* **98**, 309-312, 1928.
- [Shephard,Georges-1991] M.S. SHEPHARD AND M.K.GEORGES, Automatic three dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique, *Int. j. numer. meth. eng.*, **32**, 709-749, 1991.
- [Voronoi-1908] G. VORONOÏ, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal Reine angew. Math.*, **134**, 1908.
- [Weatherill,Hassan-1994] N.P. WEATHERILL AND O.HASSAN, Efficient three dimensionnal Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints, *Int. j. numer. methods eng.*, **37**, 2005-2039, 1994.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399